

箱玉系の数理

時弘 哲治 (東京大学・大学院数理科学研究科)

1 初めに

箱玉系とは、箱から箱へ玉を移動させる一種のゲームとして実現されるセルオートマトン系であり、(i) ソリトン解をもつ、(ii) 十分にたくさんの保存量をもつ、(iii) 初期値問題が解ける、など、ソリトン方程式に良く似た性質を持っている。また、(iv) ソリトンの散乱が Yang-Baxter 関係式を満たす、(v) 状態空間をある量子代数の $q \rightarrow 0$ での表現 (crystal)、時間発展規則を表現の intertwiner で記述できる、など、組み合わせ論的な性質も持つ。つまり、箱玉系はソリトン方程式に代表される古典非線形可積分系と、可解格子模型に代表される量子非線形可積分系の架け橋となる系 (両方の共通の極限系) であり、その数理構造を明らかにすることによって、無限次元可積分系に対する深い理解が得られると考えられる。

本講演では、(1) KdV 方程式および戸田方程式から箱玉系を構成する超離散化と呼ばれる手法、(2) 箱玉系の組合せ論・整数論的側面 (リーマン予想との関係)、幾何学的側面 (ヤコビ多様体との関係)、代数的側面 (クリスタル理論、ベテ仮設方程式との関係) について、非専門分野の方や学生の方々を対象にできるだけわかりやすく解説したい。この稿では、紙面も限られているので、箱玉系が超離散化の手法によって導出される点を具体的な計算とともに紹介することに重点を置き、箱玉系に関する諸定理を結果のみ示すことにする。興味を持たれた方は末尾の文献を参考にしていただければ幸いです。

2 箱玉系とその運動方程式

セルオートマトン (cellular automaton, CA) は、有限個の状態を取りうるセルから構成され、高々可算個の状態を遷移する離散力学系である [1]。1970 年代に爆発的に流行したコンウェイ (Conway) のライフ・ゲーム (game of life) に代表されるように、系の構成要素・時間発展規則ともにごく単純であるにもかかわらず、CA は非常に複雑な時間発展パターンを持つ。そのため、生物における形態生成や交通渋滞などの複雑な自然・社会現象の、特に数値的に扱いやすいモデルとして研究されてきた。

箱玉系は 1990 年に Takahashi-Satsuma によって提案されたフィルター型セルオートマトン¹を、箱から箱へ移動する玉の力学系として表現したものである [2]。

¹時間発展の規則が局所的でないので、フィルター型と呼ばれる。

箱玉系を構成するのは，1列に並んだ同じ大きさの箱と，その箱にちょうど1個だけ入る同じ種類の玉である [3, 4]．便宜上，箱は無有限個存在するものとし，左から右に1列に並んでおり，各箱には並び順に整数で番号が付いているものとする．これらの箱に有限個の玉をいれた配置を箱玉系の状態と呼ぶことにする．箱玉系の状態は，離散的な時間ステップで次々と変化するものとし，初期状態を時刻0の状態と呼び，以降1, 2, 3, … と自然数で状態の時刻を指定するものとする．このとき，任意の時刻 t の状態から次の時刻 $t+1$ の状態は以下の規則によって構成される²．

1. 玉のコピーをつくる
2. コピーの中の1つを最も近い右の空箱に移動させる
3. 残りのコピーの中の1つを最も近い右の空箱に移動させる
4. すべてのコピーを移動させるまで3.の操作を繰り返す
5. もとの玉を消去すると，1時間ステップ進んだものとする

時間発展の一例を図1に示している．

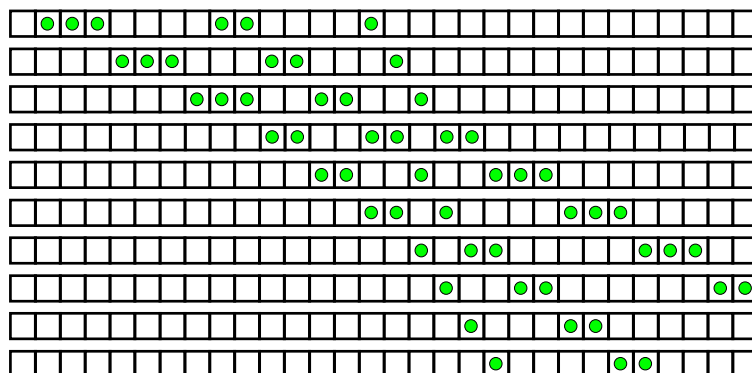


図 1: 箱玉系の時間発展の一例

図1から推察されるように，箱玉系では(1)玉の列の速度はその長さに比例する．(2)2つの玉の列は衝突の前後でその長さを変化させないが，各玉の列の位置は衝突のない場合に比べてシフトする．このふるまいはKdV方程式のソリトンに良く似ている．実際，連なった玉の列をその長さと同じ振幅を持つKdV方程式のソリトンに対応させると，(1)速度が振幅に比例すること，(2)散乱の前後でソリトンの大きさは変化しないが位相は変化すること，はまったく同じである．そこで，連続した玉の列を「ソリトン」と呼び，その玉の列の長さを「ソリトンの振幅」と呼ぶことにする．

²これはもともとのTakahashi-Satsumaの時間発展規則を周期系にも適用できるように書き換えたものである．最終結果はコピーを選ぶ順序によらないことに注意する

時刻 t における n 番目の箱にある玉の数を $u_n^t \in \{0, 1\}$ とする．箱の中に玉が存在するのは，その前の時刻に空き箱であり，かつ，その箱の左ある玉の総数がその前の時刻の玉の総数よりも少ない場合に限られるので，箱玉系の時間発展の規則を次のように表すことができる．

$$u_n^{t+1} = \begin{cases} 1 & u_n^t = 1 \text{ かつ } \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^t > \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^{t+1} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (2.1)$$

この規則は， u_n^t が 0 または 1 であることに注意し，常に $\sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^t \geq \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^{t+1}$ が成り立つことを考慮すると，

$$u_n^{t+1} = \min \left[1 - u_n^t, \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^t - \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^{t+1} \right] \quad (2.2)$$

としてもよい．(2.2) が箱玉系の運動方程式である．

3 箱玉系の保存量

N 個の粒子からなる戸田方程式はちょうど N 個の独立な保存量を持つ．これに対応して N 個のソリトンから構成される箱玉系も N 個の保存量を持つ．保存量を求める具体的なアルゴリズムは，空き箱を 0，玉の入っている箱を 1 と表し，箱玉系の状態を 1,0 列で表現すると次で与えられる [5]．

1. 1,0 列に存在する 10 対の数を p_1 とする．
2. もとの 1,0 列から 10 対を消去し新しい 1,0 列を作る．その列の 10 対の数を p_2 とする．
3. 以上の操作をすべての 1 が消去されるまで続ける．
4. このとき p_1, p_2, p_3, \dots が保存量になる．

特に $p_1 = N$ である．たとえば，

$$(\#) \quad \dots 00111011100100011110001101000000 \dots$$

においては， $p_1 = 6$ であり，これから 10 対を消去して

$$\dots 0011110001110010000 \dots$$

が得られるので， $p_2 = 3$ ，以下同様にして $p_3 = 2, p_4 = 2, p_5 = 1$ となる．自然数列 $p_1 p_2 \dots$ は非減少列であるのでこれをヤング図形の列の長さと考えると，箱玉

$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$

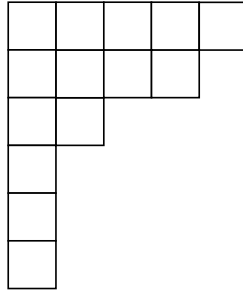


図 2: 保存量を示すヤング図形

系の保存量をヤング図形で表すことができる．たとえば，(＃) に対応するヤング図形は図 3 である．こうして得られたヤング図形の行の長さを順に L_1, L_2, \dots, L_N とすると，これも非減少な自然数列になっている．これについて次の定理が成り立つ [6] ．

定理 3.1

任意の初期状態に対して，ある有限の時刻 T が存在し， $t \geq T$ では，系の状態は右側からソリトンが長さの順に並んだ状態になり， L_1, L_2, \dots はそのソリトンの長さを順に並べたものに等しい³ ．

したがって，任意の初期状態が与えられたとき，保存量に対応するヤング図形を求めれば，最終的にどのようなソリトンに分解した状態になるかもわかることになる．

4 箱玉系と超離散 KdV 方程式

KdV 方程式：

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

を連続極限で含む可積分な離散方程式のひとつに．

$$\frac{1}{w_{n+1}^{t+1}} - \frac{1}{w_n^t} + \frac{\delta}{1 + \delta} (w_n^{t+1} - w_{n+1}^t) = 0 \quad (4.2)$$

がある [7] ．これをを離散 KdV 方程式と呼ぶことにする⁴ ．

$$w_n^t = \frac{\sigma_n^t \sigma_{n+1}^{t-1}}{\sigma_{n+1}^t \sigma_n^{t-1}} \quad (4.3)$$

³この状態では隣り合うソリトンの間隔は少なくとも小さい方のソリトンの振幅以上である．

⁴たとえば， $w_n^t = 1 + \lambda U(\Delta(n - 1/2) + \eta(t - 1/2), \varepsilon(t - 1/2))$ によって，従属変数 $U(X, T)$ を定義し， $\eta = \frac{\Delta}{2\delta+1}$ ， $\delta = \Delta^{-1}$ ， $\varepsilon = (\frac{\Delta}{2})^3$ ， $\lambda = \frac{3\Delta^2}{4}$ とおいて，(4.2) の $\Delta \rightarrow 0$ の連続極限を考えれば KdV 方程式 $U_T + 6UU_X + U_{XXX} = 0$ を得る．

とおくと, σ_n^t が

$$(1 + \delta)\sigma_{n+1}^{t+1}\sigma_n^{t-1} = \delta\sigma_{n+1}^{t-1}\sigma_n^{t+1} + \sigma_n^t\sigma_{n+1}^t \quad (4.4)$$

の解ならば (4.2) が満たされることがわかる. (4.4) を離散 KdV 方程式の双線形形式と呼ぶ. KP 階層の一般理論 (佐藤理論) から, (4.4) の N ソリトン解は

$$\sigma_n^t = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\delta_{ij} + \frac{\gamma_i}{p_i + p_j - 1} \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right)^t \left(\frac{1 + \delta - p_i}{p_i + \delta} \right)^n \right] \quad (4.5)$$

$$= \sum_{J \subseteq [N]} \left(\prod_{i \in J} (-\gamma_i) \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right)^t \left(\frac{1 + \delta - p_i}{p_i + \delta} \right)^n \right) \times \frac{\prod_{i > j, i, j \in J} (p_i - p_j)^2}{\prod_{i, j \in J} (1 - p_i - p_j)} \quad (4.6)$$

であることが導かれる. ここで, γ_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は $p_i \neq p_j$ ($i \neq j$) を満たす任意の複素数である. この連続極限は KdV 方程式 (4.1) の N ソリトン解を与える.

一般に, CA の時間発展規則は適当な区分線形方程式系によって記述できる. 事実, 箱玉系の運動方程式 (2.2) も区分線形方程式である. ただし, (2.2) は無限和を含んでいて扱いがやや面倒である. そこで, 新しい変数

$$\rho_n^t := \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^t u_k^s \quad (4.7)$$

を導入し, 等式

$$\min[a, b] + c = \min[a + c, b + c], \quad -\min[-a, -b] = \max[a, b]$$

などにより, (2.2) 式を書き換えると

$$\begin{aligned} & \rho_{n+1}^{t+1} + \rho_n^{t-1} \\ &= \max[\rho_{n+1}^{t-1} + \rho_n^{t+1} - 1, \rho_n^t + \rho_{n+1}^t] \end{aligned} \quad (4.8)$$

が得られる. これも箱玉系の時間発展を記述する区分線形方程式である.

ところで, (4.8) を離散 KdV 方程式 (4.4) と比較すると, とても良く似ている. 実は, (4.4) のパラメータ δ の代わりに $\delta = e^{-1/\epsilon}$ によって, 新しいパラメータ ϵ を導入すると,

「(4.4) の ϵ をパラメータとする解の族 $\sigma_n^t(\epsilon)$ に対して次の極限

$$\forall n, t \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \sigma_n^t(\epsilon) \quad (4.9)$$

が存在するとき，その極限を ρ_n^t とおくと， ρ_n^t は区分別形方程式 (4.8) の解になる。

ことが， $a, b \in \mathbb{R}$ として成り立つ次の簡単な等式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log (e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon}) = \max[a, b] \quad (4.10)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log (e^{a/\epsilon} \times e^{b/\epsilon}) = a + b \quad (4.11)$$

を用いて証明される [8, 9]。このように，従属変数に対する極限操作によって（微分方程式の場合には独立変数の離散化も含めて）ある方程式から区分別形方程式を構成することを，その方程式の超離散化 (ultradiscretization) と呼び，このように構成された区分別形方程式を超離散方程式と呼んでいる⁵[10]。(4.8) は KdV 方程式を超離散化したものであり，超離散 KdV 方程式と呼ばれる。得られた区分別形方程式が離散値について閉じている場合には，適当な変数変換のもとに CA の運動方程式とみなすことも可能になる。CA である箱玉系に KdV 方程式の特性が現れるのは，箱玉系の運動が超離散 KdV 方程式によって記述されるからである。

離散 KdV 方程式の N ソリトン解 (4.6) から超離散 KdV 方程式 (4.8) で記述される箱玉系の N ソリトン解を得るには P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を正整数， θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を任意の整数として

$$p_i = N_i e^{-P_i/\epsilon}, \quad -\gamma_i = e^{\theta_i/\epsilon}$$

とにおいて， $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとればよい⁶。ただし， N_i は ϵ に依存しない正の実定数であり，条件

$$P_i = P_j (i \neq j) \text{ ならば } N_i \neq N_j \quad (4.12)$$

を満たせば任意に選んでよい。その結果

$$\rho_n^t = \max \left\{ 0, \max_{J \subseteq [N], j \neq \phi} \left[\sum_{i \in J} (\theta_i + tP_i - n) - \sum_{i, j \in J, i \neq j} \min[P_i, P_j] \right] \right\} \quad (4.13)$$

となる。このとき，次の性質が成り立つ [11]。

定理 4.1

(4.13) は箱玉系の N ソリトン解を与える。逆に，箱玉系の任意の N ソリトン解は (4.13) の形で与えられる。特に， $\{P_i\}_{i=1}^N = \{L_i\}_{i=1}^N$ である。ただし L_i は定理 3.1 で用いた保存量を表すヤング図形の i 行の長さである。

⁵超離散化という言葉はパリ第7大学の Basil Grammaticos の命名。

⁶超離散 KdV 方程式の解であるためには $\forall i P_i \geq 0$, $\theta_i \in \mathbb{R}$ であれば十分である。

5 周期箱玉系の基本周期

周期箱玉系は箱玉系に周期境界条件を与えた有限個数の箱と玉からなる力学系である．したがって，有限個の状態のみをとる可逆な離散力学系であり，その運動は必ず周期運動になる．その周期は，初期状態によって一意に定まる．その最小の周期を与えられた初期状態に対する基本周期と呼ぶ．箱の数を N ，玉の数を M とするとき，内部対称性と呼ばれる特殊な対称性がない場合，基本周期 T は次式で与えられる [6]．

定理 5.1

$$T = L.C.M. \left(\frac{N_s N_{s-1}}{\ell_s \ell_0}, \frac{N_{s-1} N_{s-2}}{\ell_{s-1} \ell_0}, \dots, \frac{N_1 N_0}{\ell_1 \ell_0}, 1 \right) \quad (5.1)$$

ただし⁷，初期状態から構成されるヤング図形の相異なる行の長さを長い順に L_1, L_2, \dots, L_s とし，長さ L_j の行の数を n_j と書いたとき， $\ell_0 := N - 2M = N - \sum_{j=1}^s 2n_j L_j$ ， $N_0 := \ell_0$ ， $L_{s+1} := 0$ ，とし，

$$\ell_j := L_j - L_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5.2)$$

$$N_j := \ell_0 + \sum_{k=1}^j 2n_k (L_k - L_{j+1}) \quad (5.3)$$

また，基本周期分布の漸近的な性質に関して次の定理が成り立つ [12]．

定理 5.2

1. $\rho := \frac{M}{N}$ とする．基本周期の最大値 $T_{\max}(N; \rho)$ は

$$\exp \left[A(\rho) \sqrt{N} \right] < T_{\max}(N; \rho) < \exp \left[2\sqrt{2\rho} \sqrt{N} \log N \right].$$

の範囲にある．ただし $A(\rho)$ は ρ により定まる正定数である．

2. N, ρ を定めたとき，基本周期 T が $T > T_{\text{gen}}(N; \rho)$ となる確率は $N \rightarrow +\infty$ において 0 となる．ただし，

$$T_{\text{gen}}(N; \rho) := \exp \left[\frac{(2 \log N)^2}{-\log t_0} \right] \quad \left(t_0 := \frac{\rho}{1 - \rho} \right)$$

したがって，最大の基本周期は $T_{\max} \sim e^{\sqrt{N}}$ であるが，ほとんどの基本周期は $N^{\log N}$ 以下になる．位相空間の体積は $\sim e^N$ であるので，軌道はそのほんの一部分しか通らず，これは箱玉系の可積分性の表れと考えられる．

⁷L.C.M.(...) は (有理数に拡張した) 最小公倍数を表し， $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\text{L.C.M.} (2^{a_1} 3^{b_1} 5^{c_1} \dots, 2^{a_2} 3^{b_2} 5^{c_2} \dots) = 2^{\max[a_1, a_2]} 3^{\max[b_1, b_2]} 5^{\max[c_1, c_2]} \dots$$

である．

さらに次の定理は整数論における未解決問題であるリーマン予想との関連を示して興味深い [13] .

定理 5.3

保存量が準三角形的なヤング図形に対応する周期箱玉系の基本周期 $T(N; \rho)$ が

$$\log [T(N; \rho)] = 2\sqrt{N} + O(N^{1/4} \log^2 N) \quad (N \rightarrow \infty)$$

を満たすこととリーマン予想は等価である .

ここで、準三角形的ヤング図形とは、第 1,2 行および最後の長さ 1 の列を除いて、 i 行の長さが $i - 1$ 行の長さより 1 だけ短いヤング図形を意味している .

最後に、ベーテ仮設方程式と箱玉系の関係について次の定理が成り立つことを紹介してこの節を終えることにする . M 個の玉と N 個の箱からなる箱玉系の状態の中で、その保存量がヤング図形 Y によって特徴付けられるもの全体を Ω_M^Y , M の分割に対応するヤング図形 Y に応じて、ストリング仮説から定まる転送行列の固有ベクトル空間の絶対零度極限を V_M^Y で表すとき次の定理が成り立つ [14] .

定理 5.4

ストリング仮説の解がベーテ仮設方程式の解であれば

$$V_M^Y \subset \text{span } \Omega_M^Y$$

さらに、ストリング仮説の解からベーテ仮設方程式のすべての解が得られれば

$$V_M^Y = \text{span } \Omega_M^Y$$

6 箱玉系の拡張、初期値問題、幾何学的側面など

紙面も尽きたので、最後に 2 点、箱玉系の拡張と初期値問題、について簡単に述べ、文献を挙げておく

箱玉系の拡張は、Takahashi によって玉の種類と箱の容量の自由度が加えられ、また運搬車と呼ばれる新たな自由度も付け加えられた [15] . これらは可解格子模型の絶対零度極限という形で一般化され、クリスタル (量子代数の変形パラメータ $q \rightarrow 0$ での良い表現) を用いて一般化された箱玉系の議論がなされている [16, 17] . Ysang-Baxter 関係式を用いて可積分なセルオートマトンを構成する試みは箱玉系は A 型の量子代数に対応するが、 B 型、 C 型、あるいは例外型の量子代数に対応する系についても議論されている [18, 19] . この分野の最新の reference として [20] がある .

箱玉系の初期値問題の解法として、組合せ論を用いた初等的解法 [21] , 超楕円曲線 (あるいは一般の曲線) に付随するヤコビ多様体上の線形系を利用する方法

[22, 23], Kerov-Kirillov-Rechetikhin bijection を用いて線形化する解法 [24] などがある。また、トロピカル超楕円曲線を使って直接線形化する方法 [25] などがある。

箱玉系は簡単な力学系でありながら豊富な数理的内容を含む興味深い系である。不思議なことに、ある問題がほぼ理解できたと思うとまた新しい側面が現われ、また新しい展望が開けてくる。現在は箱玉系の幾何学的側面に関する研究が進んでいるようである。箱玉系を通じて完全に離散的なセルオートマトンの世界にさまざまな数理構造を持ち込むことができると考えている。

参考文献

- [1] 加藤恭義・光成友孝・築山 洋、「セルオートマトン法」、森北出版 (1998).
- [2] D. Takahashi and J. Satsuma, On a Cellular Automaton, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514(1990).
- [3] D. Takahashi, On some soliton systems defined by box and balls, in: Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications, NOLTA'93, 555(1991).
- [4] 高橋大輔・薩摩順吉, “単純なソリトン系をなすセルオートマトンについて” 日本応用数理学会論文誌 **1**, 41(1991).
- [5] M. Torii, D. Takahashi and J. Satsuma, Combinatorial representation of invariants of a soliton cellular automaton, *Physica* **D92**, 209 (1996).
- [6] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, Fundamental Cycle of a Periodic Box-Ball System *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 99 (2003).
- [7] R. Hirota and S. Tsujimoto, Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **64**, 3125 (1995).
- [8] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247(1996).
- [9] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, Toda type cellular automaton and its N-soliton solution, *Phys. Lett. A* **225**, 287(1997).
- [10] 広田良吾・高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003).
- [11] Jun Mada, Makoto Idzumi and Tetsuji Tokihiro, The box-ball system and the N-soliton solution of the ultradiscrete KdV equation, *J. Phys. A: Math. Theo.* **41**, 175207 (2008)

- [12] J. Mada and T. Tokihiro, Asymptotic behavior of fundamental cycle of periodic box-ball systems, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 7251 (2003).
- [13] T. Tokihiro and J. Mada, Asymptotic behavior of fundamental cycle of periodic box-ball systems: a number theoretical aspect, *Glasgow Math. J.* **47A**, 199 (2005).
- [14] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, The exact correspondence between conserved quantities of a periodic box-ball system and string solutions of the Bethe ansatz equations, *J. Math. Phys.* **47**, 053507 (2006).
- [15] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30**, L733 (1997).
- [16] K. Fukuda, M. Okado, and Y. Yamada, Energy functions in box-ball systems, *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 1379 (2000).
- [17] The $A_m^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors, G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi, and T. Tokihiro, *J. Math. Phys.* **42**, 274 (2001).
- [18] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, soliton cellular automata associated with crystal bases, *Nucl. Phys. B* **77**[PM], 619 (2000).
- [19] Daisuke Yamada, Box ball system associated with antisymmetric tensor crystals, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 9975 (2004).
- [20] A. Kuniba and R. Sakamoto, Combinatorial Bethe Ansatz and Generalized Periodic Box-Ball System, *Rev. Math. Phys.* **20** 493 (2008).
- [21] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, On the initial value problem of a periodic box-ball system, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, L617 (2006).
- [22] T. Kimijima and T. Tokihiro, Initial-value problem of the discrete periodic Toda equation and its ultradiscretization, *Inverse Problems* **18**, 1705 (2002).
- [23] S. Iwao and T. Tokihiro, Ultradiscretization of the theta function solution of pd Toda, *J. Phys. A* **40** 12987 (2007).
- [24] A. Kuniba and A. Takenouchi, Bethe ansatz at $q = 0$ and periodic box-ball systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 2551 (2006).
- [25] R. Inoue and T. Takenawa, Tropical spectral curves and integrable cellular automata, arXiv:0704.2471