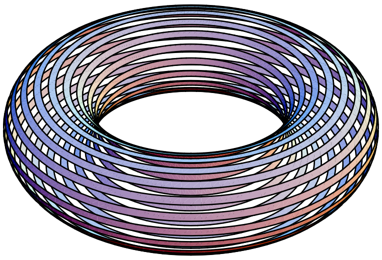
３次元多様体の典型的葉層

東大数理　　　坪井　俊

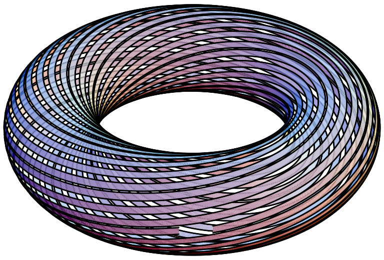
この講演の目的は、典型的葉層を定義し、これにまつわる多くの未解決問題を提示することである。

1. トーラスの葉層構造

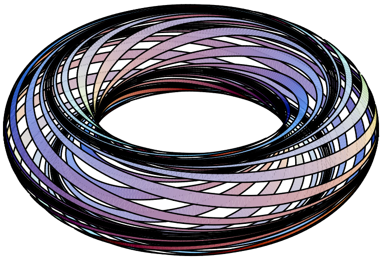
まず、２次元の曲面上の定常的な流れ（フロー）を考えよう。流れの速度ベクトルは曲面上のベクトル場である。流れの停留点（固定点）はベクトル場の零点である。コンパクト連結な曲面を考えると、停留点がないような流れはオイラー数が０のトーラス上にしか存在しない。トーラス上の停留点をもたない流れの例として次のものを並べてみよう。パラメータは無視してしている。



積葉層



非有理的直線族による葉層



４個の葉層区間束

４個のレーブ葉層

フローボックスの定理は、局所自明性を持つ１次元多様体による模様が得られることを意味している。局所自明性をもつ（正則とは限らない）部分多様体による分割を葉層構造と呼ぶ。

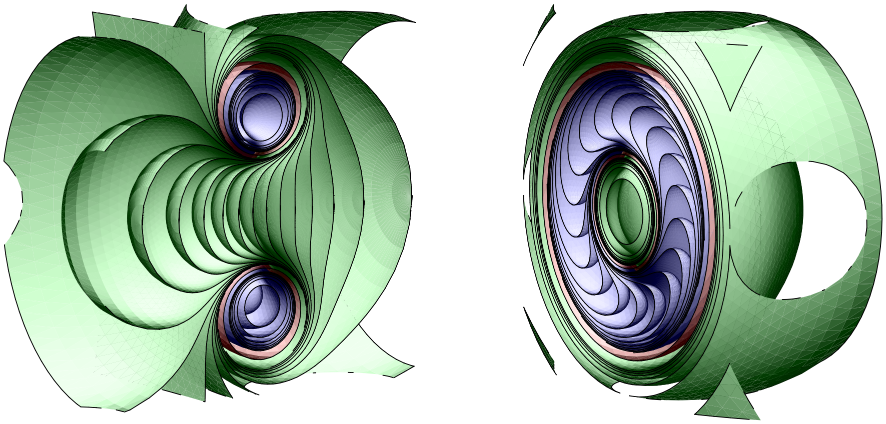
これらの図はどれも手抜きせずに描いたものであるが、積葉層というのは、どちらかというと手抜きの例である。

日本学術振興会　科学研究費　基盤研究（A）12304003　の援助に感謝いたします.

2. 3次元多様体上の余次元1葉層構造

3次元閉多様体のオイラー数は0で、すべての3次元多様体に2次元の接平面場が存在する。3次元多様体の葉層構造を局所自明性をもつ2次元部分多様体による分割と定義する。2次元部分多様体は葉(リーフ)と呼ばれる。そこで葉層構造の例としては、2次元曲面と円周の直積に上の手抜き型の例が構成できる。つまり、円周との直積 $\Sigma \times S^1$ に対して、$\Sigma \times \{*\}$ を葉とする葉層構造が定義される。

葉層の概念は、1950年以前から意識されていたものと思われるが、比較的簡単な空間と考えられる3次元球面の葉層の構成は、レーブによるものである。



3次元球面のレーブ葉層

このレーブ葉層は、レーブ成分と呼ばれるソリッドトーラス上の葉層を2つ用意し、それらの境界を貼りあわせて得られる。レーブ成分は次のようにして構成される。3次元ユークリッド空間から原点を取り除き、ここに平行な平面の族を考える。この平面族は、ユークリッド空間の定数倍(例えば2倍)の作用で不変だから、$\mathbf{R}^3 - \{0\}/x \sim 2^n x$ という $S^2 \times S^1$ と同相な空間に葉層構造が得られる。元々原点を通過していた平面は、トーラスと同相な葉を定めており、このトーラスで切り開いて得られたものがレーブ成分である。

このレーブ成分を用いてすべての3次元多様体に葉層構造が存在することを示すことができる。

これには3通りの方法が考えられる。

1つは任意の3次元多様体は3次元球面 S^3 内の絡み目(リンク)に沿うデーン手術で得られることを用い、リンクの閉ブレイド表示をレーブの葉層構造に横断的にとり、リンクの管状近傍の境界のトーラスを葉にするように葉層を改造し、デーン手術後の多様体にはレーブ成分を埋め込む。

2つ目は、任意の3次元多様体は回転可能構造つまりオープンブック構造をもつことを使う。3次元多様体からある円周を除くと円周上の曲面束で、曲面の境界がちょうど円周となるものがある。円周の管状近傍の境界を葉にするように曲面束を葉層として改造して、円周の管状近傍にはレーブ成分を埋め込む。この構成は、高次元

に拡張され、奇数次元の球面に余次元１葉層構造が存在するかという問に最初に答える構成方法（田村一郎）につながっている。

３つめはサーストンによる局所的な構成で、レーブ成分は用いるが、３次元多様体の構造定理を用いず構成するものである。この最後の構成は、一般の次元の葉層構造の存在定理の証明のための構成につながった。

こうして構成された３次元多様体の葉層構造にはレーブ成分が存在している。一方、４０年前頃に示されたノビコフの定理は、色々な条件のもとでレーブ葉層の存在を主張している。

定理（ノビコフ）。次の場合、３次元多様体 M の葉層構造 $\mathcal{F}$ にはレーブ成分が存在する。

（１） M^3 が非自明な連結和にかかれる。

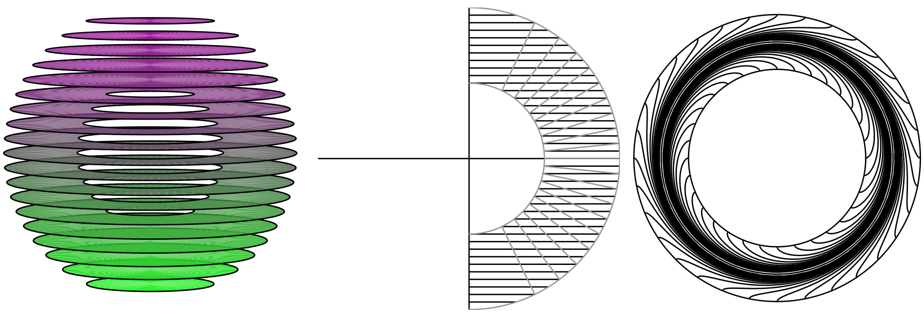
（２） M^3 の葉層 $\mathcal{F}$ が、横断的閉曲線 γ で $[\gamma] = 1 \in \pi_1(M)$ となるものを持つ。

（３） M^3 の葉層 $\mathcal{F}$ の葉 L で $\ker(\pi_1(L) \longrightarrow \pi_1(M)) \neq \{1\}$ となるものを持つ。

前に挙げた最初の２つの構成方法で美しく構成された余次元１の葉層構造は、あまり複雑な横断的ダイナミクスをもっていない。ある意味で空間に十分に拡がっていない。

たとえば、$\Sigma \times S^1$ の積葉層は、射影 $\Sigma \times S^1 \longrightarrow S^1$ によって、円周 S^1 の点による葉層構造を引き戻したものと考えられる。

また、$S^2 \times S^1 \cong \mathbf{R}^3 - \{0\}/x \sim 2^n x$ に構成した葉層構造では、$\mathbf{R}^3 - \{0\}$ の z 軸に垂直な葉層構造に対し、半平面 $H = \{(x, 0, z) \mid x \geqq 0\} - \{0\} \subset \mathbf{R}^3 - \{0\}$ を考えると、すべての $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ の葉の点を z 軸のまわりに回転して、H の点を得るが、これが写像 $S^2 \times S^1 \longrightarrow H/\sim \cong [0, \pi] \times S^1$ を定義する。$S^2 \times S^1$ の葉層はこの写像により $[0, \pi] \times S^1$ の下の図の葉層を引き戻したものである。



$S^2 \times S^1$ **のレーブ葉層**

定義。葉層構造 $(M, \mathcal{F})$, 連続写像 $f : X \longrightarrow M$ に対し、$\mathcal{F}$ の f による引き戻し $f^*\mathcal{F}$ を f による $\mathcal{F}$ の葉 L の逆像 $f^{-1}(L)$ による X の分割と定義する。$f^*\mathcal{F}$ の葉は $\mathcal{F}$ の葉の逆像の連結成分である。

注意。$f : X \longrightarrow M$ が微分可能で $\mathcal{F}$ に横断的ならば、$f^*\mathcal{F}$ の葉は部分多様体となる。

手抜きの構成と呼んだのは、引き戻しによる構成のことであった。全射による引き戻しでは、葉の位相はいくらでも複雑にできるが、横断的な構造は変わっていないと考えられる。

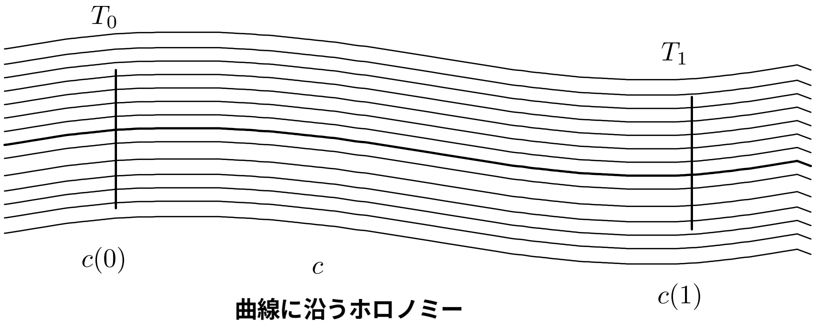
トーラス上の４つのレーブ成分による葉層と、$S^2 \times S^1$ の２つのレーブ成分による葉層は、ともに $[0, \pi] \times S^1$ の上の葉層の引き戻しと考えられるが、逆像の連結性が異なる。

葉層が、別の葉層の引き戻しになっているかどうかを問題にするときには、葉のホロノミーを考える必要がある。

3. ホロノミー.

３次元多様体上の２次元曲面による葉層構造を考える。

１つの葉 L の上の曲線 $c : [0, 1] \longrightarrow L$ は、葉 L に近い葉 L' の上の曲線に連続的に移すことができる。曲線の両端 $c(0)$, $c(1)$ において L に横断的な２つの線分 T_0, T_1 をとると、T_0 での $c(0)$ の近傍の点と T_1 での $c(1)$ の近傍の点の間に、c を葉 L に近い葉の上の曲線に移した曲線の両端になるという対応が定義される。これは、T_0 での $c(0)$ の近傍から T_1 での $c(1)$ の近傍への局所微分同相となる。これは**曲線 c に沿うホロノミー**と呼ばれる。



曲線に沿うホロノミー

さて、曲線 c が閉曲線 $(c(0) = c(1))$ である場合には横断的な線分 T_0 と T_1 は同じものをとることができ、ホロノミーは、T_0 の点 $c(0)$ の近傍同士の間の微分同相となる。

ここで、実数直線の原点の近傍同士の間の微分同相を考え、その原点における芽 germ の全体 G を考えると、G は群をなすことがわかる。

葉 L に基点として１点 b_L とその点における葉層に横断的な線分 T_0 を定めると、b_L を起点とする L 上の閉曲線に、その閉曲線に沿うホロノミーを対応させる写像が考えられる。この写像は、閉曲線の連続的変形に対して不変であり、基本群 $\pi_1(L, b_L)$ から群 G への準同型が定まる。これを**葉 L のホロノミー (準同型)** と呼ぶ。

葉 L がコンパクトのときは葉 L の近傍の葉層構造は葉 L のホロノミーにより定まる。葉 L のホロノミーは局所微分同相の芽のなす群への準同型であるが、基本群 $\pi_1(L, b_L)$ の生成元の像を代表する局所微分同相をとると、これらが実数直線の原点の近傍においては基本群 $\pi_1(L, b_L)$ の関係式を満たしている。これらの局所微分同相を用いて、葉 L がコンパクトのときは、葉 L の近傍の葉層構造のモデルを作ることができる。葉 L の近傍はこのモデルと微分同相になっている。

このような考察は５０年前頃にレーブによって行なわれた。

特別な場合が**レーブ安定性定理**と呼ばれ、葉層構造の研究の端緒となった。レーブ安定性は、単連結な葉 L があれば、多様体は円周上の L をファイバーとするファイバー束となるというものである。このように葉とそのホロノミーにより、多様体の位相に大きな条件がつくことがわかってきている。

一方、葉 L がコンパクトでないときは、ホロノミーの様子だけでは葉 L の近傍は記述されない。多様体がコンパクトならば、葉 L の閉包は L 以外の点を含む。葉 L の閉包は多様体全体になったり、横断的にカントール集合のようになったりして容易には記述できない。

4. ホロノミー亜群

曲線に沿うホロノミー局所微分同相は、曲線の近傍での葉のつながりかたを記述している。葉層構造に対し、横断的な線分を十分にたくさんとって、その横断的線分を結ぶ葉の曲線を網目のようにとり、それらの曲線に沿うホロノミー局所微分同相をすべて考えると、それは葉層の横断的構造を記述している。

多様体を記述するのに座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ とユークリッド空間の開集合の間の座標変換 $g_{ij}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_j(U_i\cap U_j)$ を用いた。葉層構造に対して、すべての葉に交わる横断的開線分の族 T_i をとると、T_i の部分開区間の間に、多様体の定義における座標変換と同様の微分同相 γ_{ij} が定義されている。詳しくいうと、T_j の点 $c(0)$ と T_i の点 $c(1)$ が同じ葉の上にあるとき、$c(t)$ をその葉の上の１つの曲線として曲線 c に沿うホロノミー微分同相 γ_c が定義されている。また、c_1, c_2 を $c_1(1)=c_2(0)$ を満たす１つの葉の上の曲線とすると $\gamma_{c_2}\gamma_{c_1}=\gamma_{c_2c_1}$ が微分同相の芽に対して成立している。（局所微分同相を結合していくと定義域が怪しくなるので芽をとることによっていくらでも結合がとれるようにした。）微分同相の芽 $\gamma=\gamma_c$ に対しては、γ の始点 $s(\gamma)=c(0)\in T=\bigsqcup T_i$ と γ の終点 $t(\gamma)=c(1)\in T=\bigsqcup T_i$ が定まることにも注意する。

葉層のホロノミー局所微分同相の芽の集合 $\Gamma=\{\gamma\}$ では、$s:\Gamma\longrightarrow T, t:\Gamma\longrightarrow T$ が定まり、$\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ に対し、$s(\gamma_1)=t(\gamma_2)$ ならば、$\gamma_1\gamma_2$ が定義される。また、$x\in T$ に対し、T の恒等写像の $x\in T$ における芽 1_x を考えると、これも Γ の元である。また $\gamma\in\Gamma$ に対し、逆写像の芽 γ^{-1} が定まり、$s(\gamma^{-1})=t(\gamma), t(\gamma^{-1})=s(\gamma)$ を満たしている。このような Γ を**亜群**と呼ぶ。

この葉層のホロノミー局所微分同相の芽のなす亜群には、芽 γ の近傍を芽 γ の代表元の定義域の各点における芽全体とするという位相が入る。これを**ホロノミー亜群**と呼ぶ。

5. 葉の空間と位相亜群の分類空間

葉層全体の葉のつながり方を調べる１つの方法は、葉を１点と見た商空間を考えることである。

さて、多様体の定義においては、$\bigsqcup\varphi_i(U_i)$ を g_{ij} の作用で同一視すると、多様体 M それ自身が得られる。

亜群 Γ の作用により、$T=\bigsqcup T_i$ を同一視したものは、葉層構造の葉の空間というものであるが、例外的な（手抜き型またはそれに近い）場合を除き、ハウスドルフ

にはならない。（ハウスドルフ空間になると、葉の空間はいわゆるオービフォールドの構造をもつ。）

商空間は定義しにくい場合でも、位相空間 X から仮想的商空間への写像を定義することは可能である。これは、位相亜群に値を持つコサイクルにより記述され、X 上の位相亜群構造と呼ばれる。

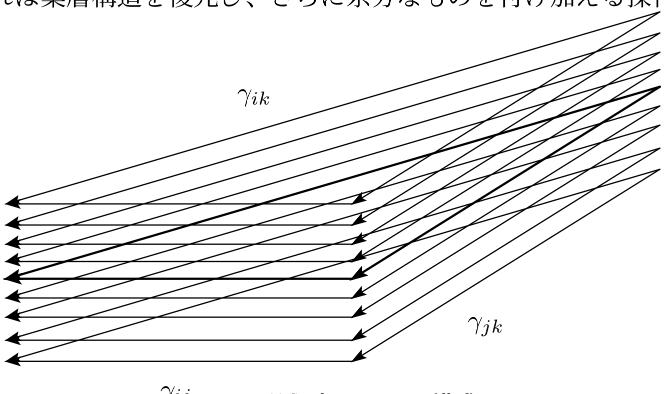
多様体に対して、他の空間から多様体への写像 $X \longrightarrow M$ は、$\varphi_i \circ f|f^{-1}(U_i) \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ の集まりであり、$f^{-1}(U_i)$ は X の開集合で、それらは X を被覆している。$X \supset f^{-1}(U_i \cap U_j)$ の点 x に対して、g_{ij} の $\varphi_j(f(x))$ での芽が対応していると考える。（さらに、$f^{-1}(U_i)$ の点 x に対しても、$g_{ii} = \mathrm{id}_{\varphi_i(U_i)}$ の $\varphi_i(f(x))$ での芽を与えるために、$\varphi_i(f(x))$ を定めていると考える。）

逆に X の開集合 V_i による被覆と、写像 $f_{ij} : V_i \cap V_j \longrightarrow \{\text{germ of } g_{ij} \text{ at } \varphi_j(U_i \cap U_j)\}$ が与えられ、$V_i \cap V_j \cap V_k$ の点 x に対し、$f_{ij}(x)f_{jk}(x) = f_{ik}(x)$ を満たせば、f_{ij} は X から M への写像を表す。

さて、位相亜群 Γ に対して、$(X, \{V_i\})$ 上の Γ **値のコサイクル**とは連続写像 $\gamma_{ij} : V_i \cap V_j \longrightarrow \Gamma$ で、$V_i \cap V_j \cap V_k$ の点 x に対し、$\gamma_{ij}(x)\gamma_{jk}(x) = \gamma_{ik}(x)$ を満たすものである。

T/Γ がハウスドルフのときには、連続写像 $X \longrightarrow T/\Gamma$ を表すと考えれば良いが、そうでないときは無理に同一視せず、同一視の様子を模様として表しておくほうが良い。

そのために、$T = \bigsqcup T_i$ に γ_{ij} が作用しているとき、(１単体)$\times$ (γ_{ij} の定義域) を (γ_{ij} の定義域) と (γ_{ij} の値域) に貼り付ける。さらに、$\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ が成立しているときには、(２単体)$\times$ (γ_{jk} の定義域) を (１単体)$\times$ (γ_{jk} の定義域)、(１単体)$\times$ (γ_{ik} の定義域)、(１単体)$\times$ (γ_{ij} の定義域) を貼り付けたところへさらに貼り付ける。この操作を続けていくと（いわゆる単体的空間の fat realization として）$B\Gamma$ という空間が得られる。（これは葉層構造を復元し、さらに余分なものを付け加える操作である。）



分類空間 $B\Gamma$ の構成

位相空間 X の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_i\}$ に対して、$\bigsqcup V_i$ を考え、同一視の代わりに、(１単体)$\times(V_i \cap V_j)$, (２単体)$\times(V_i \cap V_j \cap V_k)$ というように順に貼り付けていくことを考える。これは開被覆 $\mathcal{V} = \{V_i\}$ を位相亜群と考えたものに対して、$B\mathcal{V}$ を構成したものである。X が、$\mathcal{V}$ に対して１の分割を持つようなまともな空間ならば、$B\mathcal{V} \longrightarrow X$

はホモトピー同値である。連続写像 $X \longrightarrow B\mathcal{V}$ が、１の分割により、自然に定義されることが納得されると思う。

さて、$B\mathcal{V} \longrightarrow B\Gamma$ は自然に定義されていることに注意する。(B の構成が位相亜群のカテゴリーから位相空間のカテゴリーへのファンクターになっているということである。

こうして、X 上の位相亜群 Γ に値を持つコサイクルを写像 $X \longrightarrow B\Gamma$ として実現する葉層を持つ空間 $B\Gamma$ が定義される。$B\Gamma$ は位相亜群 Γ の**分類空間**と呼ばれる。$B\Gamma$ が仮想的商空間（葉の空間）であるのは、コサイクルを写像として表示するからであり、$y \in T$ に対して、$\Gamma_y = \{\gamma \in \Gamma \mid s(\gamma) = t(\gamma) = y\}$ とおくと、群 Γ_y に対し $K(\Gamma_y, 1) \simeq B\Gamma_y \subset B\Gamma$ となるからである。

このような位相亜群の分類空間は３０年前頃にヘフリガーにより定義された。$\mathbf{R}^n$ の微分同相写像の芽のなす位相亜群を Γ_n と書くが、Γ_n の分類空間のコホモロジー $H^*(B\Gamma_n)$ が、葉層の特性類であること（ボット・ヘフリガー）がわかり、一方で葉層の存在と、$B\Gamma_n$ のトポロジーの関係が明らかにされた（ヘフリガー・サーストン）。$B\Gamma_n$ のトポロジーは微分同相の群のホモロジーと密接な関係があることなどがわかっている。一方、$H^3(B\Gamma_1)$ にゴドビヨン・ベイ類という葉層の特性類があり、連続に変化する実数値の葉層同境不変量を定義するが、たとえば、$H^3(M^3)$ のランクが２以上の時に、実際にどのような値をとらせることができるかというような基本的問題においてもわからないことが沢山ある。

最初に多様体 M 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられていたとする。$\mathcal{F}$ のすべての葉に交わる横断的な開区間族 $T = \bigsqcup T_i$ をとり、これに作用する位相亜群 $\Gamma_{\mathcal{F}}$ を考えると、さらにこれに対する分類空間 $B\Gamma_{\mathcal{F}}$ が得られる。$B\Gamma_{\mathcal{F}}$ の構成を振り返ってみると、$B\Gamma_{\mathcal{F}}$ は葉の上の閉曲線が自明なホロノミーを持つときに、葉の上で零ホモトピックであり、さらに２次元以上の球面から葉への写像も葉の上で零ホモトピックでなければならない。このような $B\Gamma_{\mathcal{F}}$ は、もとの $(M, \mathcal{F})$ に多くのセルを貼り付けることにより得ることもできる。従って $M \subset B\Gamma_{\mathcal{F}}$ と考えても良い。（$B\Gamma$ は弱ホモトピー型のみが定まるような空間である。）

そこで問題は包含写像 $M \subset B\Gamma_{\mathcal{F}}$ が（弱）ホモトピー同値かということである。

定理（シーガル・ヘフリガー）。包含写像 $M \subset B\Gamma_{\mathcal{F}}$ が（弱）ホモトピー同値となる必要十分条件は $(M, \mathcal{F})$ の各葉のホロノミー被覆が可縮であることである。

ここでホロノミー被覆は、ホロノミー準同型 $\pi_1(L) \longrightarrow G$ の $\ker$ の定める L の被覆空間である。

6. 典型的葉層

定義。包含写像 $M \subset B\Gamma_{\mathcal{F}}$ が（弱）ホモトピー同値となる葉層構造を典型的葉層構造と定義することにする。

１次元の葉層構造が典型的であることは、閉軌道のホロノミーであるポアンカレ写像が（何乗しても）恒等写像（の芽）にならないことである。従って、一般的な（ジェネリックな）非特異なフロー（流れ）が定める１次元葉層構造は典型的である。

これはフローの力学系理論では最初から十分な複雑さがあるのが普通であるということである。

３次元多様体の２次元多様体による葉層の例をいくつか考えてみる。

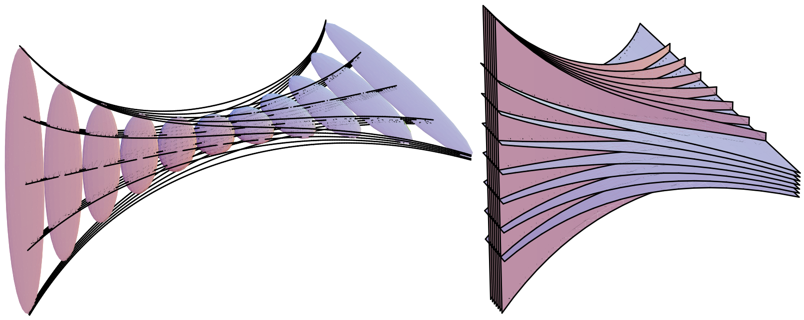
まず、３次元多様体 M が円周上の曲面束である場合、各ファイバーを葉とする葉層構造が得られるが、これに横断的な開区間の族 $\{T_i\}$ とそれに作用するホロノミー局所微分同相の芽の族 Γ を考えると、$\coprod T_i/\Gamma \cong S^1$ となるから、$B\Gamma \simeq S^1$ であり、$M \longrightarrow S^1$ はファイバー束の射影と同一視される。

３次元球面のレーブ葉層は典型的葉層構造である。レーブ葉層のコンパクトでない葉は平面 $\mathbf{R}^2$ に同相であり、トーラスに同相なコンパクト葉のホロノミー $\pi_1(T^2) \longrightarrow G$ は $1 \neq [c] \in \pi_1(T^2)$ に対し、すくなくとも片側で恒等写像でない。

３次元多様体の回転可能構造（オープン・ブック構造）から得られた葉層構造 $\mathcal{F}$ に対しては、分類空間 $B\Gamma_{\mathcal{F}}$ はレーブ葉層を持つ３次元球面である。$M \longrightarrow B\Gamma_{\mathcal{F}}$ は回転可能構造のファイバーを円板に写す写像である。

また、３次元多様体の有限深度の葉層で典型的なものは、レンズ空間のレーブ葉層だけである。

重要な典型的葉層の族として、３次元多様体のアノソフ葉層構造がある。アノソフ・フロー φ_t は、$TM = E^{uu} \oplus E^{ss} \oplus T\varphi$ という $(\varphi_t)_*$ 不変な分解を持ち、E^{ss} では $(\varphi_t)_*$ の作用は $t > 0$ のとき指数関数的に縮小的、E^{uu} では指数関数的に拡大的というものである。$E^{ss} \oplus T\varphi$ が安定葉層を定義し、$E^{uu} \oplus T\varphi$ が不安定葉層を定義するが、（不）安定葉層の葉はシリンダー $S^1 \times \mathbf{R}$ または平面 $\mathbf{R}^2$ に同相であり、シリンダーの葉のホロノミーは縮小的あるいは拡大的だからこれらは典型的である。



アノソフ・フローとアノソフ葉層

C^∞ 級の安定葉層構造、不安定葉層をもつアノソフ・フローは次のものに限る（Ghys）。

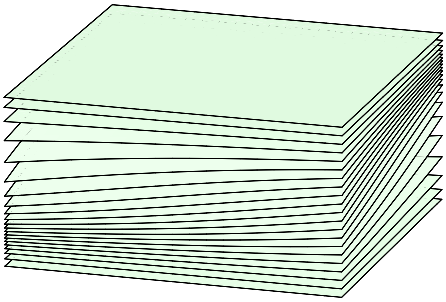
２行２列の行列 $A \in SL(2;\mathbf{Z})$ で $|\mathrm{Tr}A| > 2$ を満たすものは２つの実固有ベクトルを持つ。この固有ベクトルに平行な直線たちによる平面 $\mathbf{R}^2$ の葉層を考える。これは $\mathbf{Z}^2$ 平行移動と、もちろん A の線形作用で不変な葉層である。$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ に A から誘導される微分同相が得られるが、$\mathbf{R} \times T^2$ 上の同値関係 $(t+n, A^n x) \sim (t, x)$ による商 $\mathbf{R} \times T^2/\sim$ には、$\mathbf{R}$ と T^2 の葉層の積をとった葉層からアノソフ葉層が定まる。

また、双曲的閉曲面（向き付け可能なら種数２以上の閉曲面）上の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma$ には、測地流が定義されるが、これはアノソフ・フローであり、C^∞ 級の安

定葉層構造、不安定葉層をもつ。$PSL(2,\mathbf{R})$ の三角行列のコセットの定める葉層の離散部分群による商という記述もできる。また、葉層は、円周束 $T_1\Sigma \longrightarrow \Sigma$ のファイバーの円周に横断的である。このような円周束のファイバーに横断的な葉層構造を、葉層円周束と呼ぶが、ホロノミーは準同型 $\pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Diffeo}(S^1)$ として定義される。

C^1 級のアノソフ・フローをもつ 3 次元多様体は、数多くあるが、基本群が無限群でなければいけないなどの制約がある。

2 次元トーラスと閉区間の直積 $T^2 \times I$ には境界を葉とする葉層構造で、内部の葉が平面と同相なものが存在する。例えば、閉区間上の両端のみを零点とするベクトル場の時刻 t 写像を φ_t とすると、$t_2/t_1 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ のとき、ホロノミー $\pi_1(T^2) \longrightarrow \mathrm{Diff}(I)$ を $(n_1,n_2) \longmapsto \varphi_{n_1t_1+n_2t_2}$ で定めると、これが定義する葉層区間束はそういうものである。



$T^2 \times I$ **の葉層**

この 2 次元トーラスと閉区間の直積の葉層にレーブ成分を貼り付けると、$S^1 \times S^2$ の典型的葉層を得る。

C^∞ 級典型的葉層が 2 次元トーラスを葉としてもつとすると、レーブ葉層でなければ、トーラスの片側は、上の $T^2 \times I$ の葉層の境界のようになっており、局所稠密な葉層となっていることがわかる。

P をパンタロン（2 次元球面から 3 つの円板の内部を取り除いたもの）とする。$P \times S^1$ には、境界を葉とする葉層構造で、内部の葉のホロノミー被覆が可縮なものが存在する。

これには、まず $h : \pi_1(P) \longrightarrow PSL(2;\mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}(S^1)$ を、任意の $1 \neq \alpha \in \pi_1(P)$ に対し、$h(\alpha) \neq \mathrm{id}$, 境界の h による像は回転と共役、という性質を持つように構成する。($\pi_1(P)$ は 2 元生成の自由群、$h(\alpha) \neq \mathrm{id}$ は可算個の独立な代数的条件、回転と共役は開条件だからできる。）この準同型により、P 上の葉層 S^1 束が定まるが、これは $P \times S^1$ の葉層であり、境界を葉とするように改造できる。

これを使うと次が容易に示される。

命題。3 次元グラフ多様体には C^∞ 級典型的葉層が存在する。

さらに、3 次元多様体の典型的葉層を構成しようとすると次の定理が得られる。

定理 (Calegari)。任意の 3 次元閉多様体には C^1 級典型的葉層が存在する。

アイデアは、回転可能構造を使うものである。彼による C^0 級の典型的葉層の構成は容易である。$M^3 \setminus K \supset F$ をファイバーとし、$F \times I$ に $P \times S^1$ の葉層の構成と同様に、適当に取った $\pi_1(F) \longrightarrow \widetilde{PSL(2;\mathbf{R})} \subset \widetilde{\mathrm{Diffeo}}(S^1) \subset \mathrm{Homeo}(I)$ から定まる葉層を定めると、K の近傍にレーブ成分を持つ形に改造できて、典型的葉層を得る。Calegari の主張は非常に良い $\pi_1(F) \longrightarrow \mathrm{Diffeo}^1(I)$ が存在するというものである。

典型的葉層では、葉の上の単純閉曲線に沿うホロノミーが自明であれば必ず葉の上で円板の境界となっている。つまり、葉の上で零ホモトピックでない単純閉曲線は必ず非自明なホロノミーをもつ。この閉曲線が、多様体のなかで零ホモトピックならば、ノビコフの定理から、葉層はレーブ成分をもつ。

7. 未解決問題など

コンパクト3次元多様体の典型的葉層についてわかっていることを正直に書こうとすると未解決問題の山である。

葉層 S^1 束の形の典型的葉層は、準同型 $h : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Diffeo}(S^1)$ で、$h(\alpha)$ が固定点をもつときにその点の germ が id とならないものである。とくに、$h : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow PSL(2;\mathbf{R}) \subset \mathrm{Diffeo}(S^1)$ については、ジェネリックな h は典型的である。またジェネリックには、この葉層の葉はシリンダーと平面に同相である。

ジェネリックな h で $\widetilde{PSL}(2;\mathbf{R})$ への準同型 $\widetilde{h} : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \widetilde{PSL}(2;\mathbf{R}) \subset \mathrm{Diffeo}(\mathbf{R}) \cong \mathrm{Diffeo}(\mathrm{Int}I)$ に持ち上がるものをとると、C^0 級典型的葉層で、コンパクト葉として、種数が2以上の曲面を含むものが構成できる。

レーブ成分をもたない典型的葉層の例は、グラフ多様体、可解多様体などにしか作られていない。特に、双曲多様体に C^∞ 級の典型的葉層が存在するかどうか是非知りたいところである。

コンパクト葉を持たない C^∞ 級典型的葉層、特にシリンダーと平面による葉層の存在などについてはこれまでに述べたもの以外知られていない。

C^∞ 級典型的葉層が例外的極小集合を持ちうるかどうかもわかっていない。このような例外的極小集合には非常に強い制約があることが、Duminy により示されている。

レーブ成分を持たない葉層では、ノビコフの定理から、葉の基本群は多様体の基本群の部分群となる。これはタイトな葉層と呼ばれ、その構成についての Gabai 達の理論があり、さらに3次元多様体の本質的ラミネーションの理論につながっている。

典型的葉層では、葉の基本群から多様体の基本群への準同型は単射とは限らない代わりに、葉の基本群の非自明な元に対するホロノミーは非自明である。そういう形で3次元多様体の構造に密接に関係しており、葉層から多様体に迫るもう1つの道筋を与えているはずである。

一方、典型的葉層の存在を問うことは、多くの問題を提起している。例えば与えられた位相亜群の分類空間が有限次元となりうるか、コンパクト空間となりうるかなどである。位相亜群が、「有限生成的であること」、あるいは「コンパクトに生成されている」が必要である。これらの概念の定義自身も問題だが、それはほぼ出来ている。こうして与えられた位相亜群が、コンパクト空間の葉層のホロノミーとして実現されるかどうかの決定的な判定条件は得られていない。

$\mathit{\Gamma}_n$ よりもはるかに小さい位相亜群 $\mathit{\Gamma}_{\mathcal{F}}$ の分類空間を考えるということは、１つの新しい見地である。葉層構造 $\mathcal{F}$ それぞれに、$\mathit{\Gamma}_{\mathcal{F}}$ 葉層の世界があり、$H^*(B\mathit{\Gamma}_{\mathcal{F}})$ はその特性類であり、$\mathcal{F}$ の不変量を定義しているのである。このような考え方が、特性類に関しては、横断的区分線形葉層の良くわかる分類空間を使って、$B\mathit{\Gamma}_1$ のゴドビヨン・ベイ類を理解するというような成果を生んでいる。そこでは、３次元球面のレーブ葉層が典型的葉層であることが重要な役割を果たしている。

典型的葉層の研究が、３次元多様体の性質を明らかにする研究にもつながってほしいものである。

References

1. A. Banyaga, The structure of classical diffeomorphism groups. Mathematics and its Applications, 400. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
2. R. Bott, *Raoul Bott: collected papers.* Vol. 3. Foliations. Edited by Robert D. MacPherson. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.
3. D. Calegari, *Every orientable 3-manifold is a $B\Gamma$*, Algebraic and Geometric Topology **2** (2002), 433–447.
4. A. Haefliger, *Structure feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comment. Math. Helvet., 32 (1958), 248–329.
5. A. Haefliger, *Differential cohomology*, Differential topology (Varenna, 1976), pp. 19–70, Liguori, Naples, 1979.
6. A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Structure transverse des feulletages (Toulouse, 1982). Astérisque No. 116 (1984), 70–97.
7. H. B. Lawson Jr, *The quantitative theory of foliations*, Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Washington University, St. Louis, Mo., January 6–10, 1975. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 27. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1977.
8. J. N. Mather, *On the homology of Haefliger's classifying space*, Differential topology (Varenna, 1976), pp. 71–116, Liguori, Naples, 1979.
9. S. P. Novikov, *The topology of foliations*, Trudy moscow Mat. Obsc. 14 (1965) 248–278.
10. G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques de variétés feuilletées*, Actualités Sci. Indust., 1183, Herman Paris 1952.

E-mail address: `tsuboi@ms.u-tokyo.ac.jp`