

# 一般教育科目の数学

## ひとり一人の背景と 一生における価値を考えながら

鈴木寛（国際基督教大学）

2013年9月24日

日本数学会教育委員会主催シンポジウム

「学士課程教育としての数学教育実践事例と大学数学教育アーカイブ構想」

# ICU OpenCourseWare

<http://ocw.icu.ac.jp>

Courses > 数学の世界 > Contents

ICU OCW [検索]

音声付き画面収録ビデオ・資料・テスト・学生コメント

## 数学の世界 Homepage

ICU 数学の世界 [検索]

このコースについて・反省・学力調査・過去問  
学生コメント・評価基準・成績

OCW? *Yes!* OER? *Maybe.* MOOC? *No!*

## ICU OCW (コースコンテンツ公開) の目的

- 学生へのコースの情報提供
- 教員の教育改善
- ICUの教育をわかりやすく伝える
- 将来的には、智の共有、Open Education

「数学教育実践事例と大学数学教育アーカイブ」

## 背景

多くの学生に数学の魅力に触れ楽しんでもらいたいと思っていた。

「教育は際限がないからほどほどに」 (指導教員)

「できることをとことんやってみよう」 (10年程前)

個人的な実験報告で、Good Practice ではない。  
考えるきっかけとなれればと願っている。

## 一般教育科目の位置付け

0xx 一般教育科目 (GE) [4年間を通して学ぶ]

「数学の世界」「数学の方法」

高校数学5科目以上 20%, 3科目以上 55%,  
2科目以下 15%, 海外 10% 合計 100-120人

1xx 基礎科目 (FDN)

2xx 専門科目 初級 (AM1)

3xx 専門科目 中級 (AM2)

違いをどのように認識すべきかよく考えていなかった。

うまくはいつてはいなかった。

## 「うまくいってはいない」とは

- 伝えたいこと（目的）と、教える内容と、学生の学修のための支援がずれている。
- よく理解し、学んでいるのは、数学に興味を持ち、自分でも学ぼうとする一部の学生。  
数学を学ぶ意識の変革に至っていない。
- それぞれの学生にとって、数学を大学で学ぶことが、社会で、または一生の中で、どのような意味があるか分かっていない、というより、考えないで教えている。

## 気づいたこと

- 教育は学修によって評価されるべきもの。  
「教育から学修へ」
- 教育機関での教育は、学生の修学期間全体での学びで評価されるべきもので、その質を高めるため、個々の授業の改善は、その一部にすぎない。
- 学修背景も学修の目的もひとり一人みな異なり、学生とのコミュニケーションなしには学修について考えられない。

ひとり一人それぞれが数学に触れ、知的感動を持ち、一生価値があるなにかを学んでいくことは、非常に価値のあること。

コースの学生にとっての価値：

3単位 [週3時限 (1時限=70分) 10週間]

$6,000,000 \text{円} \times 3/150 (136) \approx 120,000 \text{円}$

## 教育から学修（習）へ

「学修にフォーカスした教育」

- 教える目的から、学ぶ目的
- 教える内容から、学ぶ内容
- 教える方法から、学びを助ける方法
- 学ぶ価値があると教員が考える理由を、学ぶ側に立って検証

## 「数学の世界」を学ぶ目的

1. 数学的思考を実際に経験しながら学ぶ
2. 論理的にかつわかりやすく説明することを学ぶ
3. 知的感動を持ちながら数学の一分野に触れる
4. 日常的に、数学・数学的思考に関心を持つ

[優先順位]

すぐに役にはたたなくても  
一生価値ある何かを学んで欲しい

[教養教育]

## 「数学的思考を実際に経験しながら学ぶ」

- 日常と近い問題設定で、応用できる考え方を学ぶ  
日常語を用い、数学語（数学地方方言）、数学の文化は徐々に紹介 異文化交流
- 論理的とは、論理的でないとは、その価値とは
- 一つ一つの論理、数学的思考をていねいに確認
- 定義を問い、否定、逆、対偶を考え、論理を検証
- 数学的思考を説明： 簡単なステップに分解する、ゴールから逆算、普遍的なものを抽出、極端な場合を考えて命題を確認、等々

## **「論理的にかつわかりやすく説明する」**

- 日常的に伝え方を工夫するようになる
- 何も知らない相手にどのように伝えたら良いかを相手の立場に立って考える

## **「知的感動を持ちながら数学の一分野に触れる」**

- パズルから、理論へ
- 自分で考え、検証し、記憶に残る感動をもつ

## **「日常的に、数学・数学的思考に関心を持つ」**

- 数学、その応用、数学的思考の価値に興味を持つ

## 数学者の弱点

- 自分が方言を話していることに気づかない  
..... 異文化交流が苦手
- 論理や計算にギャップがあることに気づかない  
... 無意識に論理・計算のギャップを埋めている
- 数学的な考え方に気づかない  
..... 数学的な考え方しかできない
- 他の分野での数学の重要性を唱えながら実際には知らない  
..... 知っているのは他の分野の人

## 学力調査

(HP にデータの一部掲載)

「分数ができない大学生」岡部・戸瀬・西村著、1999

- 計算力は一年生がトップでどんどん落ちる
- 定義や公式など覚えたことはどんどん忘れる

## 学生とのコミュニケーション (HP, OCW に掲載)

- 感激したことは覚えている
- 内面化したことは残る
- 日常的に利用できる考え方を学びたい

## 学生とのコミュニケーション (HP, OCW に掲載)

- 「学力」の違いと考えず「背景」の違いと見る  
学修背景の多様性：学習目的（ウェイトのかけかた）、学習時間、さらに、教育課程の違い  
社会に出て行く学生の方向性の多様性
- 「できる」を目指すことから、「わかる」へ。  
できないけど、好きだったという学生は多い
- 「こわい」から「楽しい」  
「子曰、知之者不如好之者、好之者不如樂之者」  
おそれ、アレルギー、頭が働かない、楽しめない

## 授業組み立てのポイント

- 授業で必ず一定数が感激できるものを取り入れる
- 積み上げは最小にするが、最後には積み上げのすばらしさを経験させる
- 単元を短くし、やり直しができるようにする。  
導入＞発展＞まとめ・小テスト  
(毎週、月・水・金、1時限70分、1学期10週間、3単位の授業、言語 J/E)
- Open Book、過去問と解答の公開、小テストの再提出制度、応用についてのレポートとその共有

# 数学の世界（内容）

## 1. 論理

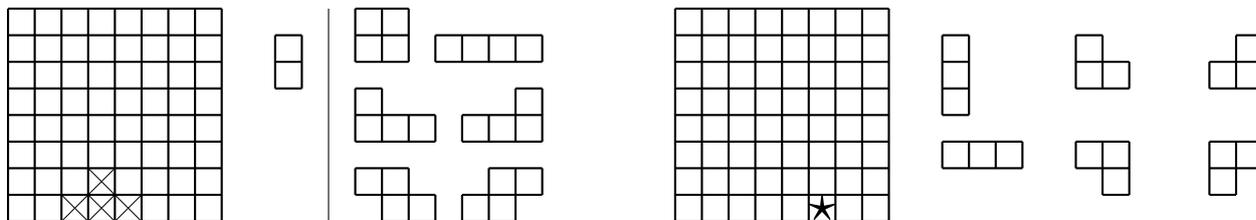
命題、論理記号、 $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ , 真理表、論理同値、真理値を表現する論理式（正規表現）

法科大学院適性検査問題 / 論理回路 (Logic Lab)

- 真理表：約束ごとにもどって計算で確かめる
- 論理学を学ぶことで論理力がつくわけではない
- 数学的思考は論理的思考と呼ばれるものとは異なる、または、論理的思考はほんの一部に過ぎない

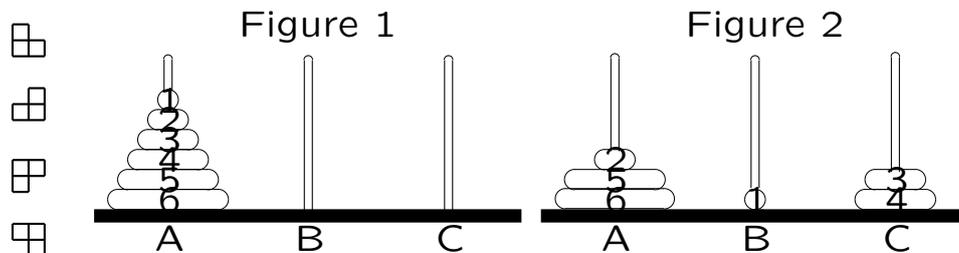
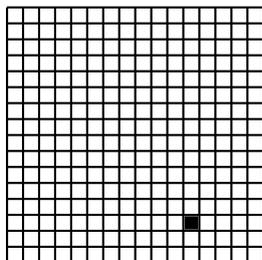
## 2. 1対1対応 (数を数える)

- 数えにくいものを数えやすいものと対応させる
- 異なるものを同じ考え方で、一つのことを複数の考え方で数える
- 対応すると仮定して、背理法の練習



### 3. 数学的帰納法

- 全称命題  $(\forall x)p(x)$  を示すひとつの方法  
3 |  $2^n - 1$ 、L字盤、ハノイの塔、おもりの問題
- 数学的帰納法を用いるとは
- 逆算の考え方 (途中からの最少手数での完成)



#### 4. 鳩ノ巣原理 (*Pigeonhole principle*)

- 存在命題 ( $\exists x)p(x)$  を示すひとつの方法
- 全称命題の否定として存在命題を考えることで違った見方ができる。

「みんなが幸せ」の否定は？

1. この教室に、1月生まれのひとが存在する。
2. この教室に、生まれ月が同じ人が存在する。
3. この教室に、誕生日が同じ人が存在する。

**Problem.** .....  ${}^9C_6 = 84$  通り

1週間で10冊読む。1日最低1冊読み、その日に読み終えた冊数を記録するとする。

(a) 1冊しか読まない日がかならずある。

(b) ちょうど3冊 (2冊) 読む期間がある。

(例えば、3日目から4日目の期間に合計3冊)

(c) ちょうど4冊 読む期間がある。

(d) ちょうど5, 6, 7冊 読む期間がある。

(e) ちょうど8, 9冊 読む期間は?

## 5. グラフ理論入門

- グラフをつかう説明

握手の定理、二部グラフの握手の定理

次数の定義、次数の和

(チェスの) ナイト・ツアー

## 6. 木と最適化問題

- 木であることと同値性、植木算の拡張
- 帰納法の応用。
- どれとどれを同じと考えるか。同型について。
- なにに注目して違いを見分けるか。
- ある性質のものをすべてもれなく数え上げること
- アルゴリズムについて
- 最小であることをどうして示すか。

## 7. オイラーグラフとハミルトングラフ

- 定義が似ているが異なるもの
- あるものの性質をしらべることで、その対偶をとってあるものではないことを示すことができる
- 基本的な考え方を使いやすい定理にすること
- 定理の使いかた
- いろいろな問題を統一的にあつかう

$$\Gamma = (V, E) : \text{ハミルトン} \Rightarrow \forall S \subseteq V, \omega(\Delta(S)) \leq |S|.$$

## 8. 平面的グラフ

- オイラーの公式
- 不可能であることの証明  
..... Kuratowski の定理の一方向
- フラーレンなど  
..... Fullerene の 5 辺形は常に 12
- 美しいグラフの分類：少し美しいものはたくさんあるが、非常に美しいものはあまりない  
..... 正多面体グラフの分類

## 学生のコメント（数学的思考）

- 計算だけが数学じゃないと思った。今後も数学に関心をもっていたいと思った。
- 数学を好きになりたかった。面白いと思えるようになった。数学の方へは進まないけれどよい終わり方をしたかったので良かったと思う。難しい記号をつかわなくても数学はできる事がわかった。
- 論理をたどっていくこと。他の勉強と同じであると改めて思った。

## 学生のコメント（論理的説明）

- 論理的に、順序を追って、他者にわかるように、わかりきったようなこともちゃんと説明できるようにになりたいと思った。
- 解けても説明ができなかったのが悔しくて、気づいたら、いかに説明するかを考えていました。
- ただ公式を暗記するだけではあまり意味がなくて、どうしてそうなるのかなどしっかり自分で理解し、自分のことばで説明できることが大事なのだとわかった。

## 学生のコメント（知的感動）

- 数学嫌いの私には、チャレンジングではありましたが、理解できる授業でした。何より楽しかったです。数学が少し好きになって終われて良かった。
- もっとパズル的なものをやると思っていたら、意外と数学していて驚きました。
- 好きだった数学に再度触れること。全てのサポートが期待以上で大満足でした。「数学をやる意味」を見いだしたこと。今まで14年間、算数、数学を頑張ってきて良かった。

## 学生のコメント（日常的に数学に関心をもつ）

- mid paper のために普段読まない数学の本を読む機会があり、数学に興味があった。
- 私は今まで数学がすごく苦手であり好きではなかったのですが、やっていくうちに色々な事が数学を使っていることに気づきました。
- 日常生活で数学が利用されていることがわかった。また文系にも理系の思考が必要だとわかった。
- 身の回りにどのような数学的思考を使う場面が潜んでいるか考えるようになった。

## 学生のコメント（コース運営）

- カリキュラムが本当によく練られていると思いました。受講して本当に良かったです。
- 内容は難しかったが、みんなに対して公平な class だった。
- 簡単な数学だと思っていたのですが、全くそんなことはなく、難しい内容がしばしばありました。小テスト、期末ともに持ち込み可なので、覚えたりすることなく、楽しむことができました。

## 学生のコメント（コース運営（続き））

- 数学への苦手意識が減った。このような数学なら数学のできる人できない人、関係なくてよかった。
- Quiz は大変でしたが、理解するのにとても役立ちました。また、Moodle を有効に使っていて、すばらしかったです。数学が苦手な私でも十分なサポートで安心できました。
- 基礎の数学がなっていない私でも少しベースが作れるかと思ったけど難しすぎてできませんでした。

THANK YOU!!

URL

<http://ocw.icu.ac.jp>

<http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/ns1a/>