中島　啓氏の日本学術振興会賞受賞に寄せて

この度、中島啓さんに第２回日本学術振興会賞が贈られたとのこと誠に慶こばしく、中島さんにお祝い申し上げます。受賞理由は「幾何学的表現論の新展開」とのことです。既に、（年代順に）幾何学賞 (1997 年), 日本数学会賞春季賞 (2000 年), Cole Prize in Algebra (2003 年) などの賞を受賞されていて、国内外で業績は高く評価されています[1]。そうした折に、業績及び受賞紹介が書かれていますので、ここでは中島さんの仕事の内容について私の印象を書かせていただきます。

中島さんは大学院時代からその後の数年に掛けて４次元 Yang-Mills 場に関する Uhlenbeck の基本的結果の高次元化の研究、またその重力版というべき Einstein 計量に対する研究（とくに４次元の場合は曲率に課せられる条件が多様体のオイラー数で制御される）をされました。ある有界条件を満たす 4 次元 Einstein 多様体の列はその部分列を取ると、いくつかの点を除いて Einstein V-多様体に収束し、除かれる点の周りでスケール変換すると完備で Ricci 曲率が恒等的に消える非コンパクト Riemann 多様体が現れることを示すなど目覚しい成果を挙げられました。この極限が漸近的に平坦になることは、板東重稔氏、加須栄篤氏と共同研究で証明されています。（漸近的に平坦であるという条件はそれまで座標を用いた定義しか与えられていませんでしたが３氏は座標によらない定式化を与えることにも成功しています。）

それに続き、漸近的平坦かつ Ricci 平坦な空間で ALE gravitational instanton と呼ばれる４次元非コンパクト完備 Riemann 多様体上の Yang-Mills instanton のモデュライの研究、そして単独のモデュライ空間ではなくモデュライ空間の族の（中間次元）ホモロジー加群の直和上への Lie 環の表現の構成という独創的な成果を挙げられました[2]。（アイデアの独創性と共に、非コンパクト空間上の交差という微妙な問題を扱う際の緻密な考察にも中島さんの力量が伺えます。）一連の研究の中で、中島さんが導入した箙多様体という超 Kähler 多様体が登場します。箙という視点を得たことでそれまでこのテーマの研究者には意識されていなかったと思われる箙の表現論等とも関わることで、中島さんの数学も広がっていったと思われます。これらの研究は、代数曲面上の点の Hilbert scheme のホモロジー加群上への Heisenberg 代数の表現の実現などへと繋がっていきます。代数曲面上の点の

[1] どうでも良いことですが、３年おきであることに書いていて気付きました。

[2] 私などは何か面白そうなことができているようだけれど何が起こっているのか、どこに向かっているのかが分からなかった。

Hilbert scheme の Betti 数は、1990 年代初めに Göttsche により計算されていました[3]が、Poincaré 多項式を点の数についても和を取って得られる母関数が上記の Heisenberg 代数の表現の指標となることが明らかにされました。このような一連の研究は、Vafa, Witten といった物理学者とお互いに刺激しあいながら進められたようです。一方で当時、中村郁氏は 3 次元商特異点の（良い）特異点解消の研究に Hilbert scheme が有望であると狙いをつけ、先ず 2 次元の場合を伊藤由佳理氏との共同研究で極小特異点解消を再構成し、その立場から McKay 対応の実現しています。3 次元の場合も中村氏や石井亮氏による商特異点の解消が研究され、伊藤氏-中島氏や Bridgeland-King-Reid 諸氏により McKay 対応の 3 次元版の研究が進められました。中島さんの研究対象で様々な研究が交錯することの一つの例です。数年前には吉岡康太氏との共同研究で Nekrasov 予想の証明もされています。私の不十分な理解ですが、この予想は Seiberg-Witten 理論に現れるプレポテンシャル（これは、Seiberg-Witten 曲線の周期理論で定式化される）が $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{C}^2$ 上の instanton のモデュライ上のある種の積分で捉えられることを主張します。(無限遠での frame 付の) instanton のモデュライ空間は ADHM 構成と呼ばれる記述を持っており、その上への底空間の自己同型の誘導する作用や frame を取り替えとして働くゲージ群の作用も記述できます。その作用（の一部）に関するある種の同変積分の不動点公式を用いた研究が展開されています。ここでも非コンパクト多様体上での扱いが大事で、両氏は緻密な議論を展開されています。この仕事も関連するところで今後大きな影響を及ぼすことと思います。

話は遡りますが、中島さんが大学院生であった 1980 年代半ばは、大域解析的手法が微分幾何学の研究で欠かせないものとなり（例えば Aubin の教科書は１９８３年に出版されています)、Kähler-Einstein 計量の存在と一意性の問題、調和写像の存在問題、解の正則性、調和写像の列の極限等の成果が得られていました。調和写像の研究は Yang-Mills 場に関する同様の一連の研究に指針を与えました。このような基本結果を基に、Donaldson は Yang-Mills 場の中でも instanton と呼ばれる解のモデュライ空間を４次元トポロジーの研究に応用し、滑らかな４次元多様体の交差形式には制約がつくことを証明しました。もちろん証明は完全なのですが、なぜ instanton を研究することが４次元多様体のトポロジーを調べることに結びつくのかはこの時点では（今でもそうかもしれませんが）はっきりしていなかったように思います。しかしこれが一回だけの僥倖ではなかったことは、それに続く諸結果が示しています。instanton には、instanton 数と呼ばれる整数が対応し（大雑把にはベクトル束のオイラー数)、モデュライ空間を考える際には instanton 数毎に扱うことができます。実際、instanton 数を止めてモデュライ空間の上で交差理論

[3] 有限群商で得られる V-多様体に対して、Dixon-Harvey-Vafa-Witten はある種の Euler 数を導入していた。そして、それが（良い）特異点解消の通常の Euler 数との一致することが予想されていた。Hirzebruch-Höfer は Göttsche の結果を用いて非特異代数曲面の対称積に対し、特異点解消として Hilbert scheme を取るとその予想が正しいことを証明した。この時点で物理学者との交流は既に始まっていたともいえるが、より深いレベルの交流は中島さんの仕事の後なのではないかと思う。

を展開することで Donaldson 多項式なる４次元多様体の不変量が得られます。すると、異なる instanton 数のモデュライ空間を用いて得られる不変量が互いにどのように関わりあうのかが問いとして自然に生じます。その流れは、Donaldson 不変量に関する Kronheimer-Mrowka の構造定理へとつながります。少し脱線しますが、1980 年代末に、当時同室であった長谷川浩司さんから「なぜ幾何の人がゲージ理論を研究するかといえば、それは量子化がしたいからでしょう」と聞かれたことがあります。「私自身はゲージ理論を研究していないのではっきりとは言えないけれど、（当時の）研究の流れを見ていると量子化が動機のようには思えない」というような答えをしたような記憶があります。Donaldson 理論を場の量子論の立場でどう解釈できるかは Witten により示され、上記の Kronheimer-Mrowka の構造定理をその枠組みから理解する中で Seiberg-Witten 理論が現れました。（もちろん先駆的な例外はありますが、一般的に言って）数学者が物理学者の言うことを真剣に理解したいと思ったのはこのころからではないでしょうか[4]？中島さんはこのような動向にも気を払いながら、ご自分の世界を広げていかれたのではないかと思います。。今ではいろいろな場面で目にすることがある

$$\text{非線形問題} \Rightarrow \text{モデュライ空間} \Rightarrow \text{代数構造}$$

という現象がどこで初めて認識されたのかは不勉強で分かりませんが、中島さんの仕事はその点でも先駆的で、影響も大きいものでした。今後も活躍を続けられ、影響力のある仕事をされることと思います。個人的感想を書いただけになってしまいましたが[5]、改めて中島さんにお祝い申し上げ、筆を置くことに致します。

小野　薫　（北海道大学大学院理学研究院）

[4] 中島さんも愛用される超 Kähler 簡約を導入した Hitchin, Khalhede, Lindström, Roček, Hyper-Kähler metrics and supersymmetry, Comm. Math. Phys. 108 (1987) という論文がある。タイトルにも「超対称性」が含まれるが、この時点で真面目に超対称性を分かろうとした幾何学者は余り居ないと思う。

[5] 「肝心なことがわかっていないなあ」といわれそうですが。