出前授業『数列とその母関数』実施報告

成瀬弘（岡山大学・教育学部）

１．はじめに

今から２年程前になりますが，小生は岡山県立岡山一宮高等学校から依頼を受けて高校で授業をさせて頂く機会がありました(２００２年１１月２７日)．その際に使用したパワーポイント原稿などをホームページに掲載しておりましたのですが，数学通信の編集委員の方がそれを御覧になったようで，先日，編集長から依頼がありこの出前授業について記事を書いてもらえないかということでした．私自身，はじめての出前授業であり，今から思うと反省すべき点の多い授業ではありましたが，今後の参考になる事もあればと思い，お引き受けすることにいたしました．このような場を与えて頂いた，編集長ならびに編集委員の方々に感謝いたします．

２．出前授業を担当することになった経緯

まず，この授業を担当することになって経緯から説明させて頂きたいと思います．岡山一宮高校には，今から６年前に理数科（約８０人）が設置されたのですが，その設置当初からの取り組みとして，大学等からの出前授業を１年次生向けに毎年開講していました．さらに，平成１４年度（２００２）から３年間SSH（スーパーサイエンスハイスクール）研究指定校となっていました．具体的には，

1. 創造性・独創性を伸ばす教育
2. 理数に重点を置いたカリキュラム
3. 大学・研究機関との連携
4. 科学系部活動の支援

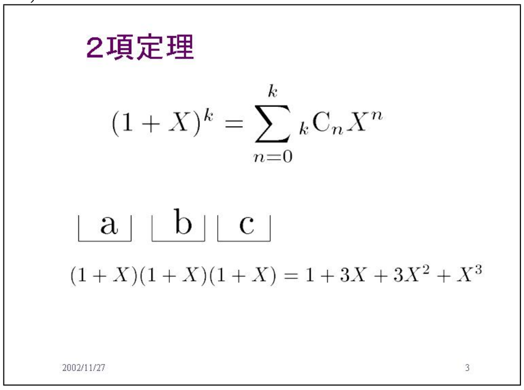
というスローガンで，１年次生向け「自然科学入門」において，高校教諭による事前・事後指導＋大学等の専門家による授業（数学および理科４科目）により「高度な内容に触れ興味・関心を引き出す」．これに引き続き２・３年次に，少人数グループ単位で課題を設定して研究に取り組むというものでした.（参考URL）時間配分は，各教科につき，出前授業は約２時間１回で，その事前・事後の高校教員による指導は，それぞれ，３時間程度ということでした．その年の４月に出前授業の依頼があり，テーマは担当者が自由に設定して良いということでした．その当時はまだ旧指導要領で，１年次では，数学Ｉの ”個数の処理 ”および，数学Ａの ”数列 ”を習うことになていましたので，この ”数列とその母関数 ”というテーマを設定しました．現在の新指導要領では，”個数の処理 ”にあたるものは，数学Ａの ”場合の数と確率 ”，”数列 ”は，数学Ｂとなっているので，このテーマは１年では使えなくなってしまいました．

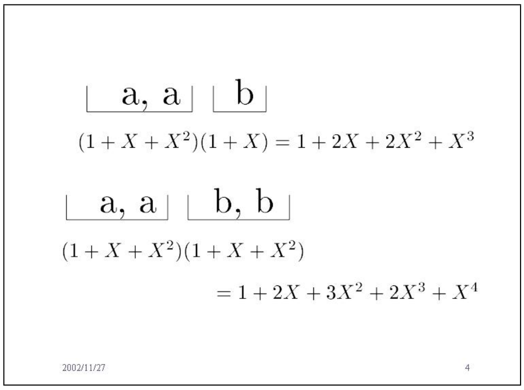
なお，私の授業を受けた１年次生は，２・３年次の課題研究では理科の実験関係のテーマを選んだとのことでした．数学の研究の場合は，理科と異なり実験のような具体的なイメージが無く，生徒はやはり実験の方を選び易いようです．授業内容の説明の中で少し述べますが，私としては，この講義を受けて発展的な研究をしてくれる生徒がいれば良いと思い，いろいろと伏線を張っておいたのですが，ほとんど気付いてくれなかったようで少々残念でした．

３．授業内容

では，どのような授業を行ったかについて、実況中継風に書いてみることにします。まず，高校の先生による事前指導において，通常の順列・組合せに加えて重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r$ についても指導して頂くようにお願いしておきました．また，数列のシグマ記号などについても確認をお願いしました．

授業の目標としては，”具体的ないくつかの例を題材に、母関数を利用した数列の計算を行う。数列の母関数というものの存在と有用性を知ることを目標とする。”を掲げました．最初は，二項定理から導入することにしました．





スライドでは，シグマ記号を用いて表示しましたが，高校の教科書等では，シグマ記号は使わずに

$$(1+X)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 X + {}_n\mathrm{C}_2 X^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n X^n$$

のように，表示されています.（特に，現行の指導要領では場合の数のところで，二項定理は出てきますが，シグマ記号を習うのは数学 B になってからなので，それまではシグマで書けません.）左図では，各 a, b, c について，選ぶ場合 X を，選ばない場合 1 を，対応させて考えることで，意味を付けることができます．本来は，$(1+aX)(1+bX)(1+cX)$ とすると，より精密な母関数となるのですが，変数が多くなってしまうので，そこまでは言いませんでした．

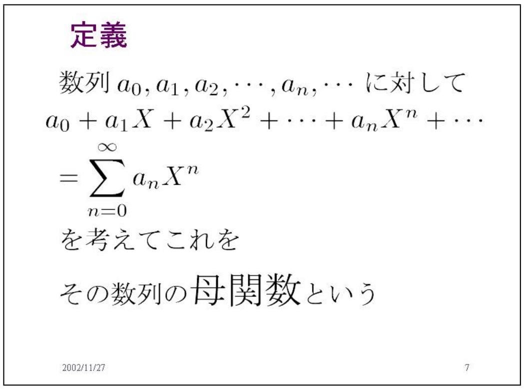
次に，このバリエーションとして，a は高々 2 個，b は 1 個まで選べる場合（右図上）に，どのような計算式が対応するかを，考えてもらいました．この場合は $(1+X+X^2)(1+X)$ を展開することで，選んだ総数についての場合の数の情報が得られることを，説明しました．同様に，a も b も高々 2 個まで選べる場合にどうなるか考えてもらい，$(1+X+X^2)(1+X+X^2)$ が対応することを，納得してもらいました．

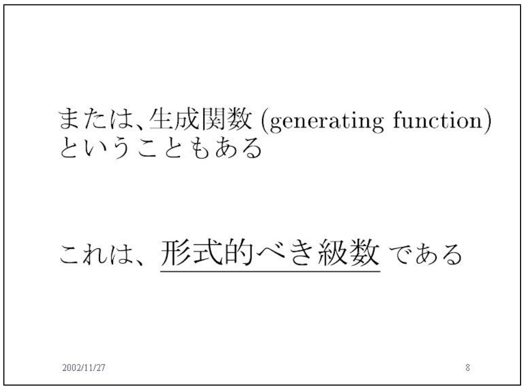
そこで次に，それでは，$(1+X+X^2+X^3+\cdots)(1+X+X^2+X^3+\cdots)$ という式の場合は，何を意味するのでしょうかと問いかけました．この場合は，a,b ともに，個数の上限なく何個でも選べるという状況で，a, b 合わせて n 個選ぶ場合の数 $(n+1)$ が，X^n の係数となると説明しました．

より，一般的に重複組合せを用いて，

$$(1+X+X^2+X^3+\cdots)^k = \sum_{n=0}^{\infty} {}_k\mathrm{H}_n X^n$$

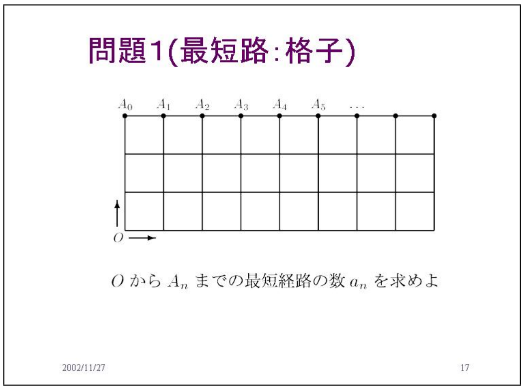
と書けることを，説明しました．

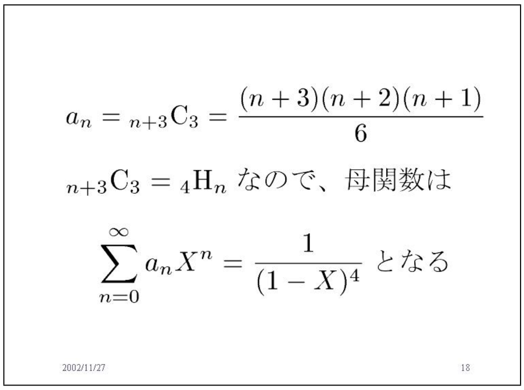




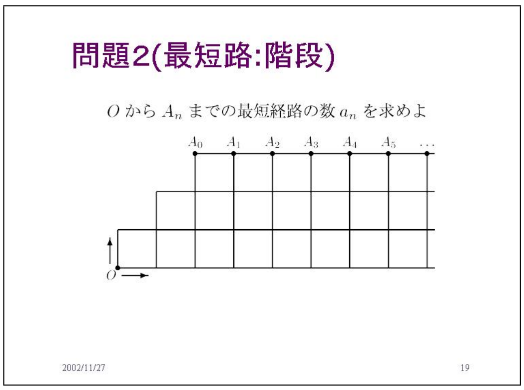
ここで，”数列の母関数 ”の定義を示しました．”形式的べき級数 ”という言葉も出しましたが，べき級数自体を，まだ学習していないのでピンとこない感じでした．さらに，形式的べき級数の和や積をどのように決めるかを式で示しました．積については，２重のシグマとなり，だんだんわかりづらくなってきたという感じでした．

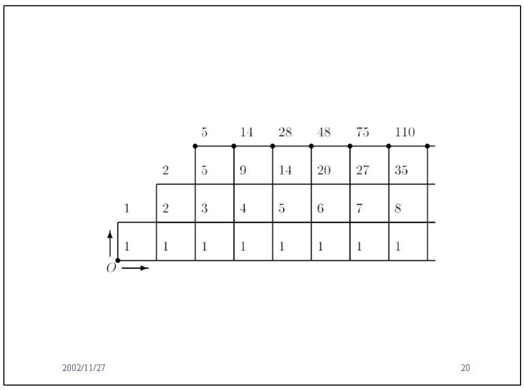
母関数の例として，等差数列の母関数，等比数列の母関数を挙げました．これ以降は，母関数の例と応用を兼ねて，問題形式で説明をして行きました．



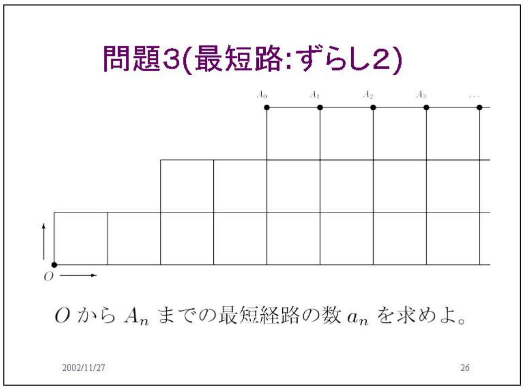


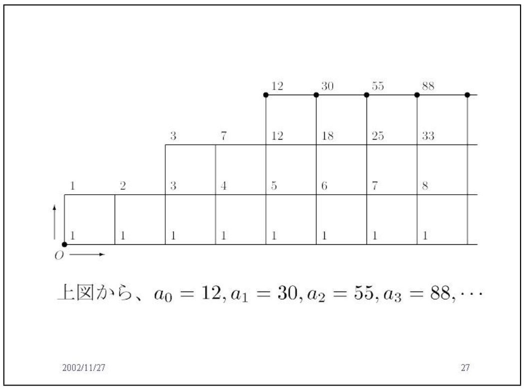
はじめの問題は，良く知られている格子点間の最短経路の数を求めるものです (左図)．これは，大抵の教科書で扱っています．具体的な方が良いので，３段で問題を設定しました．もちろん，右図で示した通り a_n およびその母関数は，すぐ求まります．





次に，この変種として，問題２では階段状になった場合を提示しました (前頁左図)．この場合は，すぐに a_n はわからないかもしれませんが，０段目を考えると，$1,1,1,1,...$ これを元に，１段目を左から計算してゆくと，$\{1,2,3,4,5,...\}$，２段目は，それから $\{2,5,9,14,...\}$ となり，３段目は $a_0=5, a_1=14, a_2=28, a_3=48, ...$ と計算できることを説明しました.（前頁右図）この具体的な計算を元に，一般項を求めることを考えます．既に出てきた母関数の例から，0 段目の母関数は，$F_0(X)=\frac{1}{1-X}$ であること，および１段目の母関数 $F_1(X)=\frac{1}{(1-X)^2}$ であることはすぐわかります．これを用いて２段目の母関数 $F_2(X)$ を求めるのですが，２段目の数列と１段目の数列は,（はじめの数項を無視すれば）階差数列を取ることになっています．この考察と，階差数列を取るということが母関数では $(1-X)$ を掛けるということに対応していること，を用いて $F_2(X)$ を求めることができる．同様にして，３段目の母関数 $F_3(X)$ を求めることができるということになります．求めた結果，$\frac{5-6X+2X^2}{(1-X)^4}$ から，重複順列の母関数を利用して，一般項が求めることができるという所にたどり着きます．

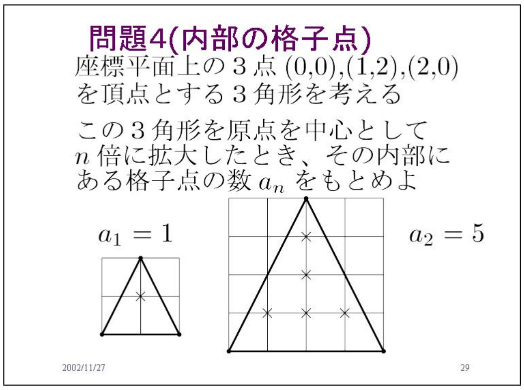


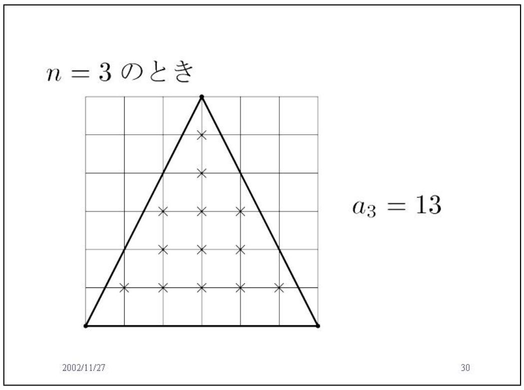


さらに，発展問題として，問題３では階段状で各ステップの長さが２となる場合について考えてもらいました．階段の図を描くだけでも生徒はかなり手間取ってしまって十分考える時間は取れませんでした．あらかじめ，問題や図を印刷したものを用意して配布すれば良かったと思っています．これについてなど，さらに時間があればいろいろと考えてもらうといろいろと面白いことが出てきます．たとえば，数列を（規則を保って）負の方向に拡張するということを考えてみると，自然に一般項の負整数の零点が浮かび上がってきます．このように，設定された問題を単に解くだけでなくいろいろとバリエーションや拡張を試みることによりいろいろと面白い性質を ”発見 ”することができます．このような事を普段から習慣付けることが非常に大切ではないかと思います．問題１，２，３を見比べて，各段ごとにずらす数が３の場合,４の場合,... などと法則性を見つけて調べてみるというようなことを考えてもらえるのも良いと思っていました．また，段数を増やして４段，５段に挑戦する事も期待していました．

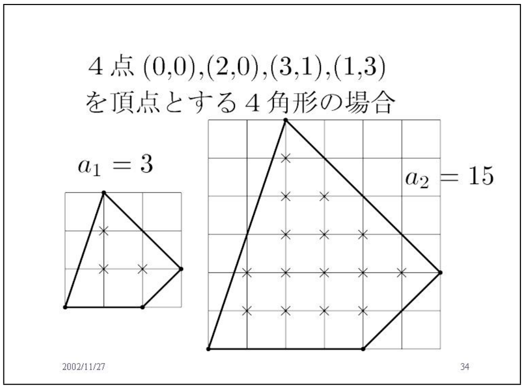
最近の中学・高校の生徒の中では，パターン化された解法を覚えて，受験問題が解けるようにすることが数学の勉強だと思っているケースが多いように思います．与えられた問題を解くだけでなく，いろいろと発展させたり新しい公式や法則性を自分で見つける面白さというのがあまり理解されていないようです．新指導要領では，”創造性の基礎を培う ”という表限が使われていますが，そのことを実感できる教師がまだまだ少ないように思います．出前授業では，”高度な内容 ”ばかりでなく，身近な題材から新しい発見につなげられるような ”創造的

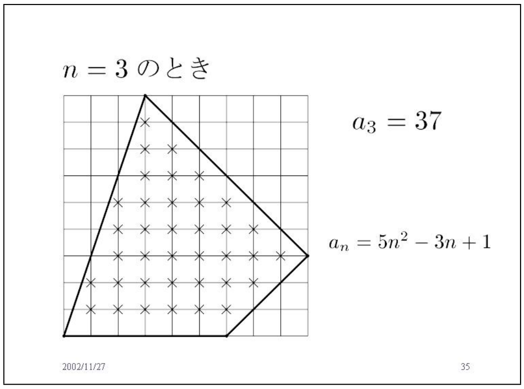
な ”視点を持たせることも目的の１つであるように思われます.



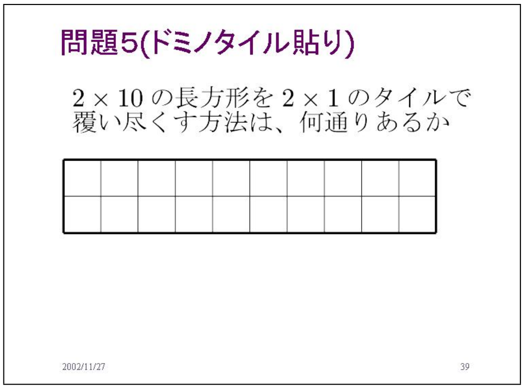


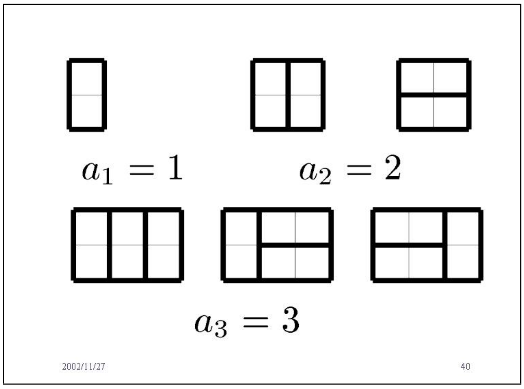
さて，次の問題４では，多角形内の格子点の数を拡大倍率 n 毎に求めることによりできる数列についての問題です．(一般項は，いわゆる Ehrhart 多項式と呼ばれるもの．) まず，はじめに簡単な３角形の場合で考えて，一般項まで求めてしまってから，逆にその母関数はどうなるかというように説明を進めました.





次に４角形の例で，すぐに一般項は求まらないかもしれないが，始めの数項を計算して階差をとることにより，一般項の予想がつくことを説明しました.





次の問題５は，ドミノタイル貼りのパターンの数を求める問題です．これは，見かけ上は数

列とは関係ないのですが，横の長さを系列化して下から求めてゆくと漸化的に求めることができるというものです．数列としては，いわゆるフィボナッチ数列になります．この母関数は，漸化式を翻訳することで $F(X) = \frac{1}{1-X-X^2}$ と求まるのですが，この形から，この数列の一般項 a_n は，n の多項式ではないことがわかります．また，このフィボナッチ数列のように，線形漸化式を満たす数列は，母関数が有理式で表されることも指摘しました．

余談ですが，一般の長方形のドミノタイル貼りについての公式は，文献 [2] などにあります．（但し，ミスプリントがあるようですので注意が必要です．）

問題6(整数3角形)

各辺の長さが整数の３角形で、３辺の長さの和が n のものの数を、a_n とする．これを求めよ

2002/11/27 61

３辺の長さを a, b, c とし、

$a \geq b \geq c > 0$ とする．このとき３角形となるための条件は、

$$a < b + c$$

2002/11/27 62

n	0	1	2	3	4	5	6	7		8	9		
a				1		2	2	3	3	3	4	4	3
b				1		2	2	3	2	3	4	3	3
c				1		1	2	1	2	2	1	2	3

10		11				12			13				
4	4	5	5	5	4	5	5	4	6	6	6	5	5
4	3	5	4	3	4	5	4	4	6	5	4	5	4
2	3	1	2	3	3	2	3	4	1	2	3	3	4

2002/11/27 63

14				15						
6	6	6	5	7	7	7	7	6	6	5
6	5	4	5	7	6	5	4	6	5	5
2	3	4	4	1	2	3	4	3	4	5

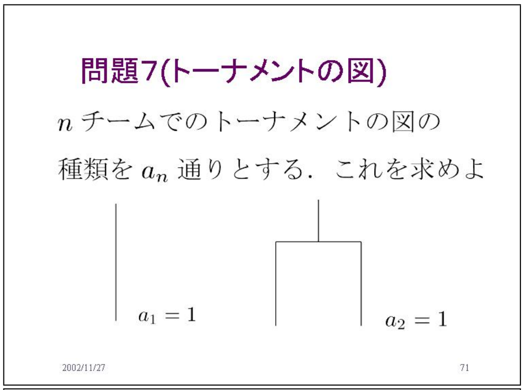
$$a_n = \begin{cases} a_{n-3} & n \text{ が偶数のとき} \\ a_{n-3} + \frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

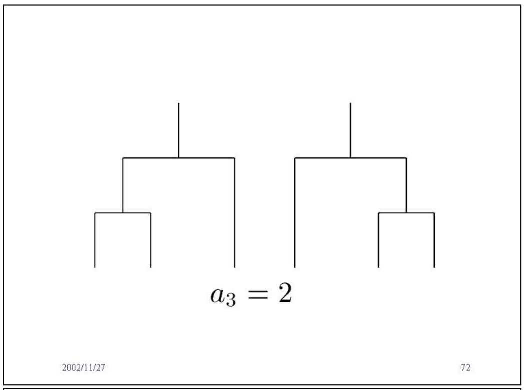
2002/11/27 64

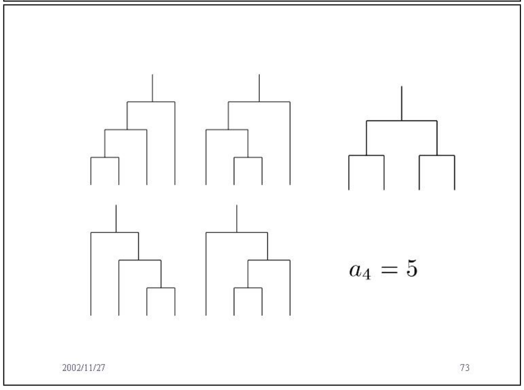
問題６では，整数三角形の数を求めます．３辺を大きい順に，a, b, c としたとき，三角形となるための条件を考慮して，可能性を列挙します．３辺の総和 $n = a+b+c$ について表を作って考察します．すると，ある法則性が観察されます．それから，a_n の漸化式を作ることができ，母関数が求められます．結果は，１２を法として，それぞれの場合で多項式になります．（これは，問題としては単純ですが，結果はかなり複雑となってしまいます．）ちなみに，この問題は，文献 [1] の中に演習問題としてあったものです．

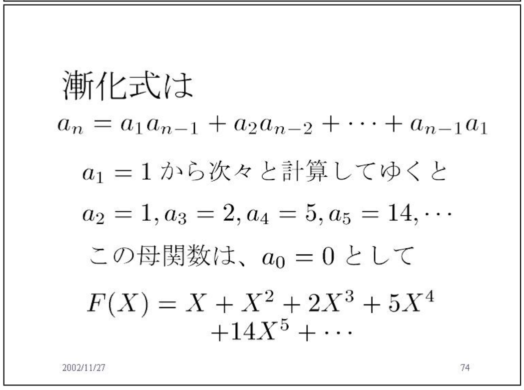
この問題なども，答えをすぐに出さずに，具体的にどのような場合があるか自分で調べて表を作成し，それを観察して特徴や法則性を見つけ出すというようにするのが本当は効果的だと思います．（授業を受けた後で，暇なときにもう一度自分で考え直すくらいの意欲があると良いのですが）

次に，母関数が有理式にならない数列の例を出しました．



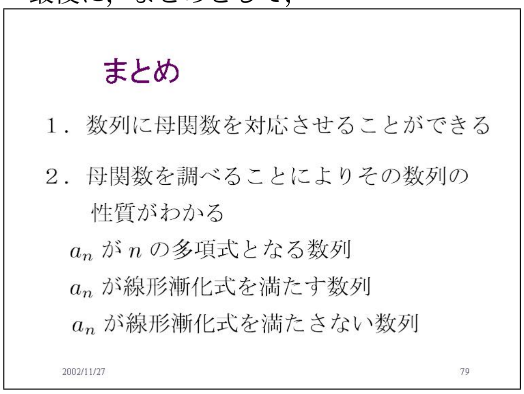


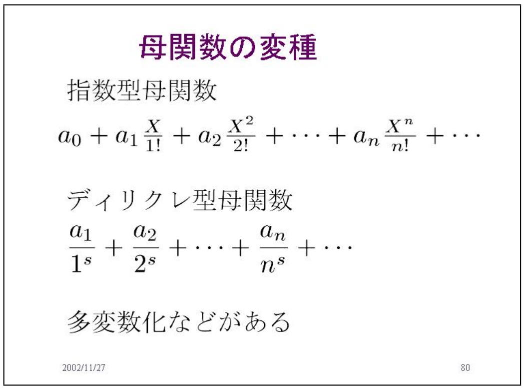




これも良く知られている例ですが，トーナメントの図の数を求めるという問題です．数列が満たす漸化式から母関数が満たす等式を作ると２次式となり，母関数は，根号のついた式で表されます．ルートは $\frac{1}{2}$ 乗ということで，一般化された二項定理を使って展開することができます．これから一般項（カタラン数）が求まります．時間がなくて，詳しい説明はできませんでしたが，２項定理のべき乗を自然数以外で考えるという発想を知ってもらいたいと思いました．

最後に，まとめとして，





で，締めくくりました．母関数の変種については，このスライドを見せるだけで詳しい説明はできませんでした．ただ，母関数といっても用途によっていろいろな種類があるということの指摘のみをしました．

４．まとめと感想など

授業を振り返って見ると，いろいろと反省すべき点が多くありました．箇条書きにまとめてみます.

[反省点]

・スライドの数が多すぎた.（８０枚）また，数式が多すぎた.（主要な数式をじっくりと見せる方が良かった）

・ハンドアウトが必要.（スライドの中で重要なものを抜き出して印刷したものを配布するのがよい）

・生徒の手作業での計算の時間も十分に組み込むべきであった.（考える時間もある程度用意する）

[今後の課題など]

・数学における ”実験 ”というものを，高校生に実感してもらうような方法はないか.

・発見的な思考を促すにはどのようにすればよいか.

・計算機などの活用．特に数式処理や数値計算ソフト及びグラフィック表示の利用.

[感想]

・１回だけの授業だったが，高校の側で事前・事後の指導をして頂いたので大変助かった．ただ，事前の打ち合わせ等に十分時間が取れず，事後のフォローアップも出来なかった点が残念.（学生の感想や質問等が返ってくると良かった）

・教員を養成する段階で，オープンエンドの問題などを与えて，教員自身が数学的な ”実験 ”をしたり，法則性や公式の擬似的な ”発見 ”をするという体験をしておくことが，生徒の ”創造性の基礎を培う ”ことにつながるように思われる.

参考文献

[1]「組合せ数学入門Ｉ」C.L. リウ著　伊理正夫　他訳 日本評論社　 1990

[2]「コンピュータの数学」D.E. クヌス他　著　有澤誠　他訳　共立出版　 1993

参考 URL

授業で使用した，パワーポイントファイル等

http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/gen-fn/ichino/index.htm

岡山一宮高校理数科での取り組み

http://www.itinomiy.okayama-c.ed.jp/risuuka/jugyou/index.html

TeXpoint（パワーポイントのスライドで，TeX の数式が入力できるアドインソフト）

http://raw.cs.berkeley.edu/texpoint/index.htm

（なるせ　ひろし，岡山大学教育学部）