書　評

現代整数論の風景
— 素数からゼータ関数まで —

落合理 著，日本評論社，2019 年

日本大学理工学部
安福　悠

本書は「数学セミナー」の連載 (2016 年 4 月から 2017 年 3 月) をまとめたものである．すでに連載時に読まれた方も多いとは思うが，一冊の本となり，体系的にとても読みやすくなっている．本書タイトルの「風景」や連載時のタイトル「数の散歩道」からも示唆されるように，現代に至るまでの整数論の発展の様子を著者とともに見て歩くように書かれている．最初は素数や代数学の基本定理についての記述から始まり，「代数的」に定義されるゼータ関数と「解析的」に定義されるゼータ関数を中心テーマにおく．最後は，これらのゼータ関数の美しい橋渡しとして岩澤理論や Langlands 対応が紹介され，ゼータ関数の特殊値への応用まで解説されている．これほどの濃密な内容をわずか 180 ページで駆け抜けるため，「散歩」というよりはむしろ「伴走」のスピードで，著者自身もまえがきで著されているように「急な坂道を登らされている」様相もあるが，読者に配慮した数々の工夫により，現代整数論の最先端の雰囲気が十分感じ取れるのではないかと思う．

最も重要な工夫は，扱うテーマ，そして扱い方の取捨選択である．ゼータ関数を中心テーマにするにしても，様々なゼータ関数が開発・研究されてきている．近年研究が盛んに行われている Selberg のゼータ関数，多重ゼータ関数，高さゼータ関数などもあるが．あえて岩澤理論と Langlands 対応に登場するようなゼータ関数に絞ることで，散歩の道筋を分かりやすくしている．

それぞれのテーマの扱い方も絶妙なバランスである．「数学セミナー」の主な読者層と思われる，大学で数学科に進むことを考えている中学・高校生を念頭におき，群や複素積分などの大学数学が解説されつつ，新書などでありがちな「あるよい条件を満たすとき，○○が成り立つ」のような定理や予想の書かれ方はされていない．定理に登場する条件はきちんと書いてあるので，余力がある読者は独自で調べられるようになっている．その上で，条件に登場する定義を全て網羅することは場合によっては潔く省略し，定義ばかりが続くような状況を避けている．二つ例を挙げる．最終章の Birch–Swinnerton=Dyer 予想の項では，Ш や $\mathrm{Tam}(E)$ の定義はされていないものの，それぞれ Tate–Shafarevich 群，玉河数と用語名は書かれてあり，また「代数体のときのイデアル類群のときのように局所と大域のズレを測る」もの，「E の悪い素数 p たちの $\bmod p$ の様子によって定まる不変量」と補足説明されている．また，9 章の Weil 予想の紹介では，Grothendieck の ℓ 進エタールコホモロジーは定義されないものの，Lefschetz 不動点公式や Poincaré双対性などの性質から，合同ゼータ関数の有理性や関数等式を導けることが説明されている．本

格的な内容を扱い，整数論研究の雰囲気は伝えつつも，難しい定義などは避けることで流れが見やすくなっている．文献も多く紹介されているので，さらに勉強を積み重ねてより専門的な本に挑戦しようという意欲が湧き出るような記述がされている．

第二の工夫と感じたのは，背景となる数学史が織り交ぜられている点である．原論文まで遡りながら，理論が生まれた経緯を数学者の肖像画とともに辿ることができる．例えば7章の代数的整数論の紹介では，Kummer が Crelle の論文で定義した「理想因子」の概念の簡略版が紹介されており，現代のイデアルとの違いが分かる．Kummer 自身も分かりにくいと認識していたらしく，理想因子の存在をフッ素に例えたり，理想因子の構成手順を，試薬を加える手順になぞえたりしているらしい．のちに同等の概念を Dedekind が導入し，現代の整数論では Kummer 的な精神と Dedekind 的な精神が融合されている，と説明されている．このような歴史的な背景は数学者にとっても面白いし，数学的な議論は多少難しいと感じる読者にとっても読み続ける動機づけとなっている．より数学的な歴史的経緯についても詳しく述べられており，例えば5章では，ゼータ関数の零点の個数評価に関する Riemann の議論があいまいだったこと，7章では，虚2次体が9個のみであるという Heegner の証明は間違っていたものの Stark による正しい証明も実は考え方が近かったことについて触れられている．

本書の特徴として，著者の奥様が描かれたというイラストも欠かせない．数学の本にしては珍しく，美術館に飾ってあるような品格と温かみを兼ね備えた絵が表紙となっており，「風景」という本書の題名に沿って，緑豊かな庭 (IHES でしょうか？) の黒板 で議論する二人の数学者が描かれている．文中にも粋な挿絵が挿入されており，数学の散歩の道中の風景として楽しめる．特に，円周を周るカメと中心値の値を唱えるうさぎで Cauchy の積分公式を表した絵 (5章)，「無限次拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ の高みに上ると景色が広がり代数的対象と解析的対象が結びつく岩澤理論」を表現した伊原康隆氏の言葉「滝の上には虹がかかる」を描いた絵 (8章)，Langlands の哲学で Hasse–Weil の L 関数 (代数的) と Hecke の L 関数 (解析的) の理解が深まる様子を表現した「ロゼッタストーンの両脇に立つ Wiles と Deligne の絵」 (10章)，p 進の手法を用いることで様々なゼータ関数の様々な特殊値を行き来できることを表現した加藤和也氏の言葉「p 進ワープ航法」を描いた絵 (11章) が印象に残る．

最後に，各章の内容を駆け足で紹介する．1, 2章は「広がっていく数の世界」と題されており，整数，有理数，実数，p 進絶対値を使った完備化 $\mathbb{Q}_p$，方程式の根が全て入っている $\mathbb{C}$・$\overline{\mathbb{Q}}$・$\mathbb{C}_p$ が紹介された後，数論幾何の舞台として p 進周期の体 B_{dR} に触れられている．3章は，方程式の根とならない数である超越数，そして超越数と判定する方法であるディオファントス近似が紹介されている．Liouville の定理や e の超越性が証明付きで述べられており，連分数の理論や一次対数形式に関する Baker の定理も触れられている．4, 5章は「ゼータの登場」と題されている．まず4章では，素因数分解が成り立たない $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の例のあと，Riemann ゼータ関数 ζ の定義と $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$ の値が導出され，$\zeta(3)$ の無理数性 (Apéry の定理) などを通し，ゼータ関数の不思議さや威力，そして「ゼータ」と呼ぶに適した特徴に触れられている．続く5章では複素関数としてのゼータ

関数の性質，Dirichlet の算術級数定理 (等差数列における素数の無限性) の証明の概略，解析接続，関数等式が紹介され，Riemann 予想と，それにまつわる零点の評価と素数分布への応用が述べられている．

6 章から 9 章までは主に代数的な話題である．6, 7 章は「代数的整数論の源流を求めて」と題されている．6 章では，2 元 2 次形式で表せる整数の値の理論の発展の経緯や Pell 方程式と連分数の関連について述べられたあと，2 次形式の類数が定義され，代数的整数論の典型議論として，Gauss が証明した Fermat 方程式の指数が 3 の場合の証明が紹介されている．続く 7 章では，Gauss の議論をより高い指数で行おうとすると $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ が UFD でないことが壁になることと，それを乗り越えるイデアル理論が紹介され，代数体の単数群や類数が定義されて，2 次形式の類数との関連が述べられる．そして，一般 Riemann 予想に関連させる形で類数問題 (類数が h になる 2 次体の個数) が判別式の正負の場合どちらも議論される．8 章では，局所 ($\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}_p$) と大域 ($\mathbb{Q}$ や代数体，関数体) を比べる局所大域原理が述べられ，2 次形式の場合の Hasse–Minkowski の定理が紹介されている．原始根に関する Artin 予想，円分体のガロア群，Gauss 和の法則が示された後，平方剰余の相互法則が証明されている．そして，一般 Riemann 予想を仮定した原始根の研究 (Hooley の定理)，p べき円分体の類群の p 部分を決定する岩澤の代数的類数公式，解析的 p 進ゼータ関数や代数的 p 進ゼータ関数とそれらを結びつける岩澤主予想 (Mazur–Wiles の定理) が紹介されている．

9 章と 10 章は「ゼータの進化」と題され，1 変数関数体のゼータ関数とその Riemann 予想，この高次元化として，有限体上の有理点の個数を用いた合同ゼータ関数が定義され，いくつかの場合で計算されている．また，Gauss 和や Jacobi 和の性質を用いることで，Fermat 曲線の場合も部分的に計算されている．続いて Weil 予想が，研究の進展の経緯とともに紹介されている．10 章では，Hasse–Weil の L 関数が紹介された後，モジュラー形式，Ramanujan の τ 関数の諸性質や予想，Hecke 作用素などが定義され，Hecke の L 関数の解析接続や関数等式の証明のあらすじが述べられている．最後に Langlands 哲学として，Hecke L 関数の性質を Hasse–Weil の L 関数の性質から導く Deligne の結果や，逆に，Hecke の L 関数の性質から Hasse–Weil の L 関数の解析接続や関数等式を導くことが紹介されている．

そして 11，12 章でゼータ関数の特殊値が述べられる．Riemann ゼータの整数での値を Contour 積分や関数等式を用いて求める方法が紹介され，Dirichlet L 関数の場合も述べられる．その後 $s = 1$ の周りの情報として解析的類数公式が紹介され，Tauber 型定理を用いた虚 2 次体の場合の証明と，実 2 次体の場合の証明概略が述べられている．そして，奇素数 p がゼータの負奇数での値を割り切ることと，p が $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の類数を割ることの同値性 (Kummer の定理) の証明の概略が述べられ，より詳しい Herbrand–Ribet の定理などが記されている．続く 12 章では，$s = 0, 1$ 以外での特殊値に関する Lichtenbaum 予想や，楕円曲線の Hasse–Weil L 関数に関する Birch–Swinnerton=Dyer 予想が述べられ，これまでの研究が紹介されている．最後に，Kontsevich–Zagier の周期の定義，そして Riemann ゼータ関数の正整数での値が周期であることが示され，一般の Hasse–Weil

の L 関数の臨界点における特殊値とモチーフの周期積分を関連させる Deligne 予想，非臨界点と Beilinson 単数規準との関連など，現代の研究の様子が語られている．

以上からも分かるように，かなり本格的な内容も紹介されているので，数学者にとっても一読に値する．未解決問題を解くことに関するコメント (54 ページ) や，予想を仮定した研究についてのコメント (103 ページ) も，個人的には身に染みた．是非本書を手に取って，本書末尾にあるように「数学という堅固に積み重ねられた人類財産の重さ」を感じながら，整数論研究の風景を一望して頂きたい．