

女子中高生夏の学校 2019

実験・実習「地図の塗り分けについて～四色定理を体験する～」

大阪市立大学数学研究所

河村 建吾

1. はじめに

女子中高生夏の学校（以下、夏学）は、進路選択について考えていたり、科学・技術に興味・関心のある女子中高生（進路の文系・理系は問わず）を対象に、キャリアパス形成の支援を目的とした合宿形式の体験型プログラムです。今年で15回目となる夏学は、2019年8月9日～11日に国立女性教育会館（埼玉県比企郡嵐山町）で開催されました。今年は全国各地から101名の女子中高生が集まり、日本数学会からは、実験・実習およびポスター展示、各種相談コーナーへの協力、実行委員として参加しました¹。この度の夏学で、筆者は実験・実習の講師を担当させていただきました。本稿では実験・実習とポスター展示について報告します。

2. 実験・実習「地図の塗り分けについて～四色定理を体験する～」

夏学では、理系を専門とする研究者・技術者の指導の下、生徒たちが実験・実習に取り組みます。今年も14団体による実験・実習があり、筆者が担当した「地図の塗り分けについて～四色定理を体験する～」には、6名の生徒が参加してくれました（図1）。また、首都



図 1: 実験・実習の様子

¹夏学の運営母体は昨年未だに NPO 法人化しており、日本数学会は今年からその賛助会員となりました。

大学東京の阿蘇愛理さんに学生 TA として参加していただき、ポスター展示を担当した群馬高専の清水理佳先生と石川高専の小林竜馬先生にも手伝っていただきました。以下、実験・実習の内容となります。

■四色定理についての紹介

はじめに、四色定理とその歴史を簡単に紹介しました。四色定理の主張はとてもシンプルなので、生徒たちが定理の主張を理解するのに長い時間はかかりませんでした。

四色定理は位相幾何学的グラフ理論の定理であり、その主張は「四色あれば、どんな地図でも隣り合う領域が異なる色になるように塗り分けることができる」というものです。例えば、図2は東京23区の簡略的な地図を表しており、隣り合う2つの区が異なる色になるように4色（赤、青、黄、緑）で塗り分けることができます²。

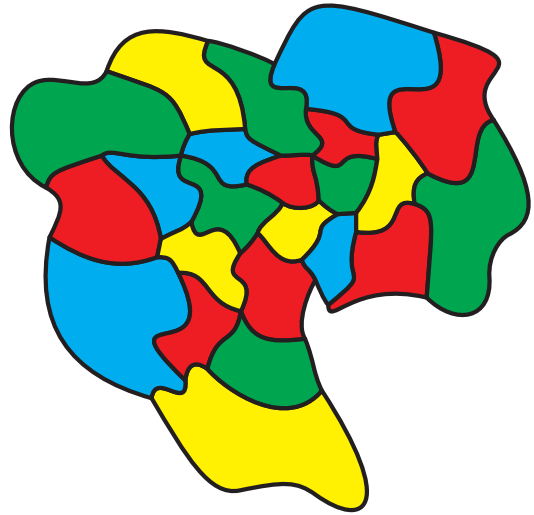


図 2: 東京 23 区の塗り分け

歴史を簡単に紹介すると、1850 年代に「四色あれば、どんな地図でも隣り合う領域が異なる色になるように塗り分けることができるか」という問題（四色問題）が提起されました。1879 年に四色問題はケンペによって肯定的に解決されたかに思われましたが、1890 年にヒーウッドがケンペの証明の誤りを指摘しました。さらに彼は、ケンペの証明方法を用いると「五色あれば、どんな地図でも隣り合う領域が異なる色になるように塗り分けることができる」という定理（五色定理）が成り立つことを指摘しました。その後、四色問題はしばらく未解決のままでしたが、1976 年にアップルとハーケンにより肯定的に解決されました。彼らの証明方法はコンピュータを用いるというもので、当時の数学者たちに大きな衝撃を与えました。

■四色定理を塗り絵で体験させる

四色定理の主張を理解した後は、課題として、四色定理が成り立つことを体験してもらいました。元々は地図の塗り分けに関する定理ですが、ここでは塗り絵と色鉛筆を配布し、隣り合う領域が異なる色になるように4色で塗り分けてもらいました。今回用意した塗り絵はマンダラ塗り絵というもので、集中力を向上させたり、精神をリラックスさせたりする効果があるみたいです。生徒たちはスタッフに確認してもらいながら、一心不乱に塗り

²通常は地図が球面上にあると考え、無限遠点を含む領域にも色を塗ると思いますが、今回の実験・実習では、無限遠点を含む領域は基本的に考えないようにしました。

絵に取り組んでいました。マンダラ塗り絵は対称性があるので、対称性を意識すると比較的容易に4色で塗れると思います。完成した塗り絵を見ると、色の選び方や塗り方などが一人ひとり異なり、生徒たちの個性が感じられて面白かったです（図3）。

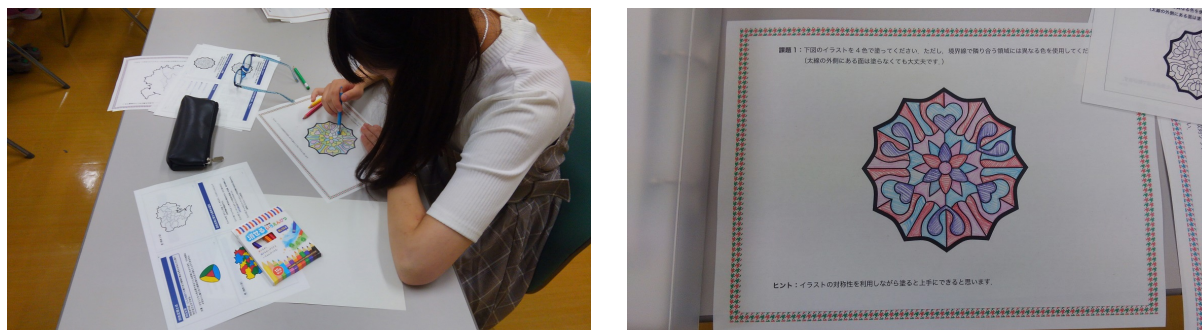


図3: 塗り絵の様子（左）と塗り絵の成果（右）

■地図の塗り分けを双対グラフで理解させる

続いて、平面グラフとその双対グラフについて解説しました。地図を平面グラフとして考えると、地図の塗り分けは、対応する双対グラフの頂点に色を塗ることを意味します。例えば、図2の東京23区の地図に対応する双対グラフとその頂点の彩色は図4のようになります。生徒たちは、地図の領域がどのように隣り合っているかという情報を、双対グラフを用いてシンプルに取り出せることに感心していました。

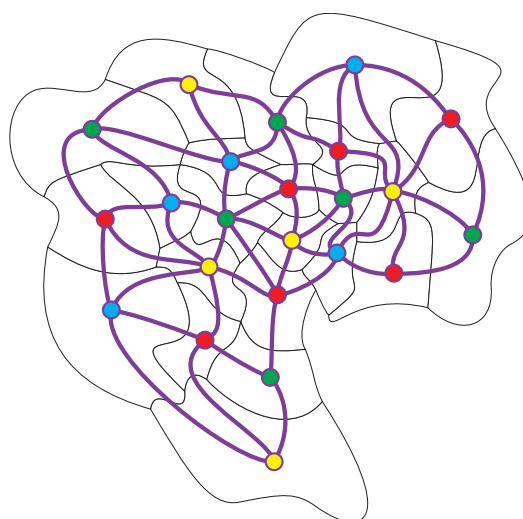


図4: 東京23区的双対グラフ

地図の塗り分けと双対グラフの関係を確認した後は、双対グラフを実際の地図から作成し、その頂点を彩色する課題に取り組んでもらいました。

夏学の開催地が埼玉県ということで、さいたま市の地図から双対グラフをつくり³、その後、色画用紙とクラフトパンチ⁴を用いて、双対グラフの頂点を4色でデコレーションしてもらいました。型抜きした色画用紙でデコレーションするときは、付箋のり⁵で仮止めしながら作業を進めると便利です。生徒たちは好みの色画用紙とクラフトパンチを手に取り、黙々と課題に取り組んでいました（図5）。

³埼玉県の地図も用意していましたが、埼玉県の市町村は全部で63個あるので、課題の難易度はかなり高いと思われます。一方、さいたま市には10個の区が設置されているので、課題の難易度は低めです。もう少し手頃な難易度の地図を用意すれば良かったかもしれません。

⁴紙を丸型、星型、ハート型などに型抜く道具です。100円ショップで購入できます。

⁵付箋のように貼って剥がすことができるのりです。100円ショップで購入できます。



図 5: 色画用紙とクラフトパンチ（左）と課題の成果（右）

■五色定理の証明を目指して

最後に、ケンペの手法を用いた五色定理の証明を目指して、より数学的に地図の塗り分けを解説しました。地図の隣り合う領域に異なる色を塗る問題を考えるときは、三枝地図⁶のみを考えれば十分であり、特に、橋や1辺形、2辺形を含まないと仮定できます。さらに、球面のオイラー標数を用いると、そのような三枝地図は3辺形、4辺形、5辺形のいずれかを必ず含むことがわかります。三枝地図の性質をまとめた後は、領域の個数に関する数学的帰納法によって五色定理を証明しました。三枝地図の性質に関する解説は、みんな納得しながら聞いていたと思います。一方、数学的帰納法と五色定理の証明は、特に中学3年生と高校1年生には、難しい内容だったので、もう少し工夫が必要だと感じました。

3. ポスター展示「不思議で楽しい図形たち～フラクタルの世界へようこそ！～」

ポスター展示は、生徒たちが興味あるブースを訪れて、様々な理系分野の知識を収集する企画です。今年は過去最高の45団体が出展し、清水先生と小林先生が「不思議で楽しい図形たち～フラクタルの世界へようこそ！～」を担当しました。また、筆者と阿蘇さん、東海大学の松井泰子先生も一緒にブースに入りました。黒い紙にオイルパステルで書いたチョークアート風のポスターに誘われて、多くの生徒たちが訪れてくれました（図6）。

ポスター発表の内容については、まず最初にコッホ曲線を紹介してから、コッホ曲線を描いてもらいました⁷。コッホ曲線の次元（フラクタル次元）が非整数だと伝えると、どの生徒も非常に驚いていました。次元の計算方法は正方形や立方体といった具体例を交えて説明し、コッホ曲線を相似比3倍で拡大すると元々のコッホ曲線4個分となるので、その次元が $\log_3 4 = 1.2618\dots$ だと解説しました。その後、描いてもらったコッホ曲線をポスターに貼りつけてコッホ雪片を作る予定でしたが、うれしいことに、コッホ曲線を記念

⁶各頂点に接続する辺の本数が3本である地図（平面グラフ）のことです。ちなみに、図2の地図は三枝地図ではありません。（4本の辺が接続する頂点が3個あります。）

⁷正確には、各線分の真ん中を正三角形で膨らませる操作を3回だけ繰り返した“コッホ曲線もどき”を描いてもらいました。

に持ち帰る生徒が多かったです。フラクタル図形の不思議な性質が生徒たちの興味を掻き立て、ポスター展示を大いに盛り上げる結果となりました。

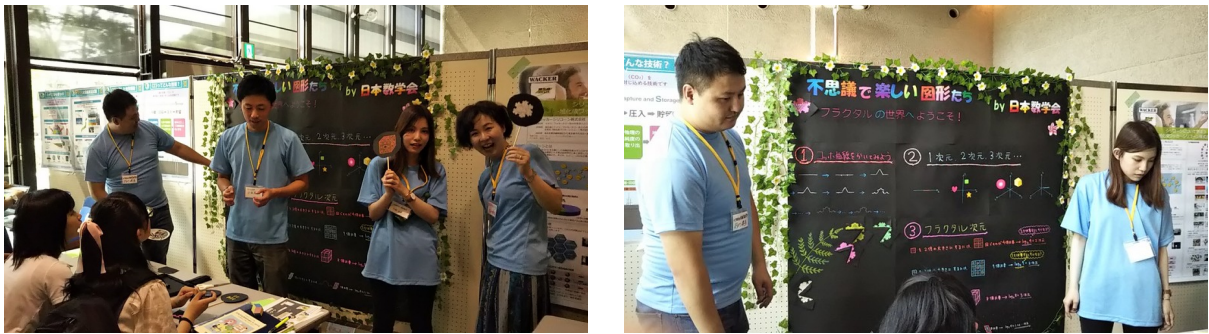


図 6: ポスター展示の様子

4. 最後に

夏学の実験・実習の講師としてお声がけくださった群馬高専の清水理佳先生，実験・実習の学生 TA として参加した首都大学東京の阿蘇愛理さん，ポスター展示を担当された石川高専の小林竜馬先生，ポスター展示にご協力いただいた東海大学の松井泰子先生，夏学実行委員として全体の企画や運営に携わった東京大学の柏原賢二先生と秀明大学の大山口菜都美先生，皆様と一緒に日本数学会のメンバーとして夏学 2019 に参加することで，貴重な経験を積むことができました。心より感謝申し上げます。



図 7: 日本数学会のメンバー