# 今井直毅さんの第 11 回（2019 年度）井上リサーチアウォード受賞によせて

京都大学大学院理学研究科
伊藤　哲史

今井直毅さんが第 11 回（2019 年度）井上リサーチアウォードを受賞されました．これは，自然科学の基礎的研究で優れた業績を挙げ，更に開拓的発展を目指す若手研究者の独創性と自立を支援することを目的としたもので，博士の学位取得後 9 年未満の研究者が対象です．受賞者には賞状と研究助成金（一人当たり 500 万円）が与えられます．今回の受賞者は 3 名であり，数学・数理科学分野からは今井さんが唯一の受賞者です．

今井さんは，2007 年 3 月に東京大学理学部数学科を卒業後，2010 年 9 月に東京大学大学院数理科学研究科の博士課程を（あっという間に）修了して，京都大学数理解析研究所の助教になられました．2013 年 4 月からは東京大学大学院数理科学研究科の准教授を務められており，教育・研究に尽力されています．

今井さんの研究題目は「局所ラングランズ対応の幾何学的実現」です．以下では，まず，局所ラングランズ対応やその幾何学的実現とは何かということを簡単に述べて，その後で今井さんの研究について紹介したいと思います．（私の理解不足もあり，かなり大雑把かつ不正確な説明になってしまうことをご容赦ください．）

有理数体 $\mathbb{Q}$ には通常の絶対値以外にも，素数 $p$ ごとに $p$ 進距離と呼ばれる距離が定まっています．$p$ 進距離に関する $\mathbb{Q}$ の完備化を $\mathbb{Q}_p$ と書き，$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大を $p$ 進体と言います．$p$ 進体は整数論における基本的な研究対象です．$p$ 進体 $K$ の整数論における最も基本的で著しい結果が，$K$ のアーベル拡大を記述する局所類体論です．これは，乗法群 $K^\times$ の表現が，$K$ のヴェイユ群（絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を少し修正した群）の 1 次元表現 $W_K \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と一対一に対応するというものです．簡単に言えば，乗法群 $K^\times$ が分かれば $K$ のアーベル拡大がすべて分かってしまう，という理論です．題目にある局所ラングランズ対応は，局所類体論を表現論の枠組みで一般化するもので，1970 年代にラングランズにより提唱されました．局所ラングランズ対応は様々な簡約代数群 $G$ に対して考えることができます．$G = \mathrm{GL}_n$ の場合を大雑把に述べると，$\mathrm{GL}_n(K)$ の超尖点的表現が分かってしまえば，ヴェイユ群の $n$ 次元既約表現 $W_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ がすべて分かってしまう，ということになります（$G = \mathrm{GL}_1$ の場合が局所類体論にあたります）．$\mathrm{GL}_n(K)$ と $W_K$ という一見似ても似つかない群の表現の間に不思議な対応があるというこの主張は，相互法則の非可換版の一つの形と考えられています．$\mathrm{GL}_n$ の局所ラングランズ対応は最終的に 2001 年にハリスとテイラーにより証明されました．（その後，エニャールやショルツェによる別証明も得られています．）

次に，今井さんの研究のもう一つのキーワードである「幾何学的実現」について説明します．上に述べたように，現在は $\mathrm{GL}_n$ の局所ラングランズ対応には（少なくとも）3 通りの別証明が知られていますが，実は，そのどれもが大域的・間接的なものです．$\mathrm{GL}_n(K)$ の超尖点表現を具体的に与えたとき，それが $W_K$ のどのような $n$ 次元既約表現と対応するかは，まだ完全には分かっていません（$\mathrm{GL}_2$ の場合でさえ，完全には分かっていないようです）．そこで，証明では，$\mathrm{GL}_n(K)$ や $W_K$ の作用する空間を構成して，その空間のコホモロジーを経由して表現の間の対応を構成するという間接的な手法が取られます．これが「幾何学的実現」です．どのような空間を考えるかによって，様々な種類の幾何学的実現が考えられます．伝統的にはルビン–テイト空間やラポポート–ジンク空間が用いられてきました．これらの空間は，$p$ 進一意化理論によりモジュラー曲線やその高次元版である志村多様体と結びつけることができ，保型形式などの大域的手法を使って調べることができます．しかし，ルビン–テイト空間やラポポート–ジンク空間は考えられる簡約代数群 $G$ に制約があるなど，理論的には扱いづらいものでした．

2016 年頃に，ファルグが，局所ラングランズ対応の幾何学的実現について新しい予想を提出しました．$p$ 進体から「ファルグ–フォンテーヌ曲線」と呼ばれる空間を定めることができます．ファルグは，幾何学的ラングランズ予想（ラングランズ対応の代数幾何学的な類似で，物理学におけるミラー対称性とも関係があるそうです）に触発され，ファルグ–フォンテーヌ曲線上のベクトル束のモジュライ・スタック上の偏屈層を使うことで，任意の（準分裂な）$G$ に対する局所ラングランズ対応の幾何学的実現が得られることを予想しました．この予想の定式化には，ショルツェによるパーフェクトイド空間やダイアモンドといった新しい空間概念が縦横無尽に用いられ，予想を定式化するだけでも全く当たり前のことではありません．しかも，予想が成り立つ例は（$G$ が可換な場合を除くと）知られていませんでした．ひょっとしたら，大風呂敷を広げて予想を立ててはみたものの，まったく手も足も出ないという雰囲気が漂っていたかもしれません．

今井さんの研究について紹介します．今井さんは，ガロア表現や局所ラングランズ対応に関連する幾何学について，いくつものすぐれた業績を挙げています．大学院在学中には群スキームのモジュライ空間の連結性に関するキシンの予想を解決し，$R^{\mathrm{red}} = T$ 定理（テイラー–ワイルズのいわゆる「$R = T$ 定理」の変種）をより一般の場合に示しています．その後，ルビン–テイト空間の幾何学を詳細に調べることにより，$\mathrm{GL}_2$ の局所ラングランズ対応の幾何学的実現を局所的手法で再証明する研究を行いました（津嶋貴弘さん（千葉大理）との共同研究）．また，楕円曲線に伴うガロア表現の局所因子に関するクラメル–タネル予想を解決しています（セスナヴィシスさん（パリ南大）との共同研究）．今井さんは $p$ 進体上の解析幾何学，特にリジッド空間やアディック空間の理論に精通しており，志村多様体上のアーベル多様体が「潜在的に良い還元」を持つ部分の幾何学的構造

についての研究も行っています（三枝洋一さん（東大数理）との共同研究）．そして，ガイシンさん（東大数理）との共同研究においては，上述のファルグ予想を，$\mathrm{GL}_2(K)$ の超尖点表現の場合に（ファルグ予想の定式化に現れるパラメータ $\mu$ に関するある仮定の下で）解決しました．$\mathrm{GL}_2$ の場合のファルグ予想に現れるダイアモンドは，古典的な（$\mathrm{GL}_2$ の場合の）ルビン–テイト空間と結び付くことが知られていました．ルビン–テイト空間のコホモロジーについてすでに知られていた結果（非可換ルビン–テイト理論）を応用することで，モジュライ・スタックの「半安定部分」におけるファルグ予想を示すことができます．今井さんは，モジュライ・スタックの「非半安定部分」の幾何学を（non-basic な）ラポポート–ジンク空間の幾何学と結びつけて調べることで，非半安定部分のコホモロジーに超尖点表現が現れないことを証明して，ファルグ予想を解決しました．この結果の重要性は言うまでもありませんが，使われた手法も様々な方向への発展・応用が見込まれる重要なものです．最近の研究では，今井さんは津嶋さんとの共同研究をさらに進めて，有限体上のユニタリ群のヴェイユ表現の幾何学的実現を詳細に調べています．古典的なドゥリーニュ–ルスティック理論をさらに深める研究です．ヴェイユ表現はユニタリ群・直交群・斜交群などの古典群の表現論において重要な役割を果たすものですから，今井さんと津嶋さんの研究が，ユニタリ群の局所ラングランズ対応に応用される日も近いのではないかと思います．

こうして今井さんの研究を眺めていると，何でこんなに難しいことがこんなに簡単に証明できてしまうのかと驚かされます．今井さんによる解説は，常に簡潔・明快で，あまりにもあっさりとしていて魔法のように見えることもあります．以前，今井さんにパーフェクトイド空間の集中講義を依頼したことがあるのですが，普通なら集中講義の期間内に定義することすら困難なパーフェクトイド空間をいとも簡単に導入して，次々と大定理を証明していく様は感動的でした．おそらく，今井さんは，物事の幾何学的な本質を見抜く洞察力が抜群にすぐれていて，さらに，$p$ 進体や簡約代数群にまつわる複雑な計算を軽々とこなしてしまう忍耐力・計算力があるからこそ，このような素晴らしい研究ができるのでしょう．

ところで，ファルグ予想の本当のすごいところは，古典的なルビン–テイト空間やラポポート–ジンク空間では扱えないような簡約代数群 $G$（やパラメータ $\mu$）が一斉に扱えるところにあると思います．ぜひ，今井さんには，$\mathrm{GL}_2$ のような小さな群にとどまらず，任意の簡約代数群でファルグ予想を一気に解決してさらに一般化するくらいの勢いで，新しい世界を切り拓く新理論を打ち立てていって欲しいと思います．そんな（やや無責任な）期待を込めながら，今井さんの研究の紹介を終えたいと思います．

今井さん，井上リサーチアウォードの受賞おめでとうございます！