コンピュータグラフィックスと数学

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
落合 啓之 （Hiroyuki Ochiai）

Abstract

岡山大学で開かれた 2018 年度秋季総合分科会市民講演会（9 月 23 日）の記録．講演した内容そのものは後半にスライドを掲載し，前半では講演を取り巻く様々な事情を記す．

長い前書き

数学通信編集部の原稿依頼の趣旨は，市民講演会の講演者に，市民講演会で喋ったことと同じ内容を，市民講演会に出ていなかった人を読者とするような読み物として執筆してほしい，というものであると想像します．ですから，本来は，前書きなどをつけずに，さっさと喋った内容に入ればいいのだと思います．しかし，数学通信第 23 巻第 2 号に掲載された，前回の市民講演会の小島定吉氏の報告に倣って，前置きを書かせてください．

数学通信

この数学通信という媒体を，私は週刊誌のようなものと考えています．少し前の編集後記で言及されていた郵便料金をめぐる発足の経緯もそうですが，日本数学会が定期的に発行している和文の「数学」「数学通信」の棲み分けを考えると，それが自然でしょう．単行本と週刊誌を比べると，週刊誌の特徴は，記事はじっくり読み返したりしなくても内容がわかるように書かれている．次の号が出てきたら前の号は処分する．書棚にずらりと保管したりしない．書かれている内容が，人の間で話題になる．時間が経った記事は賞味期限切れになる．などといったものが挙げられます．小島氏の文章は文春砲ほどではありませんが，なかなか破壊力のあるものでした．というのも，小島氏はご自分の市民講演会の講演を失敗だと断じているのです．もちろん，謙虚な小島氏のセリフを額面通り真に受ける必要はないのですが，自分の講演の 1 ヶ月前に届いたこの数学通信には正直驚かされました．また，失敗というプレッシャーに，少々怖くもなりました．

依頼

さて，時計を少し巻き戻します．昨年の 9 月の日本数学会における市民講演会の講演を依頼されたのは，3 月の数学会年会の直後でした．その時まで，市民講演会という催しを日本数学会が行っていることは年会プログラムや数学通信を通じて知っていましたし，また，どのような講演者がどのような内容の講演をしたかも数学通信を通じて何となく見ていました．ただ，市民向けの宣伝活動の一環，と考えていて，聴衆として自分が聞

きに行くとか，あるいは自分が講演するという当事者意識を持ったことがなかったので，この寝耳に水の依頼を受けてしばらく考えました．と言っても，黙考していたのではなく，依頼のメールをくださった広報委員長と幾つかのやり取りをして，市民講演会の趣旨（これは想像通りのものでした），実際に来ている聴衆がどんな人たちか（これは行ったことがなかったので，大変参考になりました），それに関係して，予備知識として何を仮定することが許されるか，など，考えるにあたって参考になるような情報をいくつもいただきました．

予備知識

例えば，オープンキャンパスであれば，主たる対象は高校２年生（または１年生）であり，それまでに履修しているのは高校２年生の１学期までの内容なので，行列や微分などは仮定しづらいです．この点，市民講演会に現れる高校生たちは，より数学力が高く，行列や関数などを既知としてよかろう，というアドバイスをいただきました．実際，講演の後半ではその辺りは仮定して話をしました．今回の聴衆の正確なフィードバックを得てはいませんが，そのあたりでの齟齬は特に聞きませんでした．

聴衆と市民

一方で，聴衆にプロの数学者，すなわち，翌日からの数学会への参加を主たる目的とする日本数学会会員が前日入りして市民講演会を聴くことがあるとは想像していましたが，聴衆の中にそういう人もある程度多いという情報は私にとっては意外であり，やや気になる点でもありました．そして，実数は把握していないものの，当日，顔がわかる数学者を随分と見かけましたので，この情報も正しかったと思います．

この場合のジレンマ，すなわち，市民とプロが混じっている状態は，以前，ホームカミングデイで講演した時にも経験しました．ホームカミングデイには様々なケースがあり得ると思いますが，私が以前講演した名大のホームカミングデイは，主要な参加者が，現在在学している学部生のご両親（つまり，バックグラウンドはまちまち）と，卒業生（つまり，最低限，数学科を卒業している．実際に同窓会に来るのはその後も数学と縁のある人が多く，名大名誉教授も来られる）という両極でした．この時のやりづらさに比べると，市民講演会の聴衆のスペクトルはそこまで広くはないと考えられるのですが，一方で，市民講演会は同窓会とは違って，数学の講演を聞くことを唯一の目的として来る人たちですから，彼らに「専門の数学の話って，やっぱり難しくって全然わからないものなのだなあ」という妙な納得をして帰ってもらう，というのは，本意ではありません．それで，もちろんプロ市民を聴衆から捨ててしまうわけです．

もっとも完全に退屈させてしまうと会場がダレてしまい，来てくれた数学者に申し訳ない上にこちらもやりづらいですから，スライドの５ページの CG や，回転行列の $-\sin\theta$ のエピソードなどを交えて，楽しんでもらうことにしました．前者には苦笑があり，後者は後でも反響があったので，まあまあというところでしょうか．

準備

どういう話をするかを，約半年間，折に触れて考えに考えました．過去に CG の人向けに数学の話をしたことはありますが，その場合は CG の説明は不要です．一方，数学者に CG の話をする時は，数学の道具は何でも使えるので，CG の説明を数学風に言い直せば話が通じます．また，数学の学生向けに紹介する時は，現在学習中の行列や多変数の微積が CG で活躍する様子を紹介すると，へえ，って感じになります．いずれのケースも実際にはそう単純ではないものの，基本構図はあります．市民講演会も上記の最後の場合をアレンジすればできるだろうとは考えられるところです．

今回はちょっと肩に力が入った感じの「$\cdots$ と数学」と大きく出てみました．成算はなかったものの，5 月の頭にタイトルをつけた頃は，そんな気分だったのです．さて，企画特別講演は数学会の一般講演や特別講演と同様に事前に予稿を書く必要があり，これを 10 ページほど書くと何をどのような順序でしゃべるか（そして，何を喋らないか）の大体のあらすじができます．ところが，市民講演会で事前に要求されるのは 300 字程度のアブストラクトのみです．したがって，8 月になってもまだ話の骨子が固まっていませんでした．

CG に関しては全部は話せないので幾つかの事例を取り上げて話すことは決めていました．それと合わせて，自分が CG を勉強したての時に感じたこと，特に making の movie を数学者や市民に見てもらいたいなあと，8 月の研究会 SIGGRAPH の時に改めて思いました．また，数学に関しても，紹介する CG に使われる数学を紹介するというのが今までやってきたことです．しかし，ほらどう，意外でしょ？という紹介をするのも鉄板でいいのですが，そろそろ私自身が飽きてきて，もうちょっと違ったアプローチを模索していました．

撮影，録画，著作権

8 月に数学通信が届いたのと同じ頃，情報システム運用委員会から講演のビデオ収録とインターネット公開をお願いするメールが届きました．これは広報委員会からずっと前に予告されていたことなので驚きはしなかったのですが，改めて考えてみると新たな懸念材料が生じました．映像，特に動画の著作権に関することです．数学と CG の movie は我々のプロジェクトで製作した自作のものがあり，それを当日も流したのですが，making の movie は自作することは無理です．ゲーム会社や映画会社が CG の研究会で流していて，YouTube などにも置いてある映像を使うことを考えていました．しかし，これを録画した講演が公開されたら，まずいのではないか，とさすがに思いました．この懸念に関しては，情報システム運用委員に相談に乗ってもらい，少し勉強もして考えました．録画や公開はしない，という選択肢も提示されたのですが，もちろん，本来は，仮に録画していなくても，市民講演会のような非営利な催しであっても，講演で使うには許諾の必要なことかもしれません．そこで，結局，making の話はしない，したがって，自作でない映像は使わない，という内容で講演を組み立てることにしました．内容的にはやや残念でしたが，しかし，主催者である数学会までも巻き込んで長期にリスクを潜在的に抱える，という事態を避けてよかったと思います．ということで，問題映像は使わなくなったので，録画や公開は可能になりました．

場所

また，主催校（岡山大学数学科）の方々は，スクリーン・機器・音響などに関する私からの問い合わせを丁寧に調べてくれました．休日に大学の施設を使うこともご苦労があったと思いますが，私個人としては教室での講演でしたのでアウェイ感がなくて助かりました．また，劇場型で客席が真っ暗になってしまうと聴衆の反応が見えづらいのですが，暗くしなくても大きなスクリーンが見やすい部屋だったのはラッキーでした．もっとも，いつも市民にとって便利な場所（例えば岡山大学は駅から近い）に大学があるとは限らず（例えば九大伊都），これは常に叶えられる条件ではないでしょう．

スライド

講演は，考え直した末，CG の定義を数学風にする，という切り口から始めることにしました．これは，CG-Arts 協会の標準教科書の第 1 章に書かれていること，つまり CG の世界では常識的な内容です．数学風にアレンジして紹介することで，合わせて，数学とはどういった話し方をするのかということも紹介に込めました．

次ページから，講演で用いたスライドを載せます．幾つかお詫びしますが，前半は特に，スライドを元に話すというよりも，話がどこにあるのかの標識を見ながら話を聞いてもらう，という趣旨の紙芝居になっているので，講演なしのスライドだけでは意味が取れないところもあります．また，movie は紙では再現できないので削ってあります．適当な静止画を該当箇所に置ければよかったのですが，うまく操作できず，そのスライド自身を非表示にしているので，どこに動画があったかがわかりづらい箇所もあるかもしれません．movie は `https://www.youtube.com/watch?v=I2Y-pJYmu9A` にありますが，この暗号のようなものをタイピングするのは厄介なので，YouTube で mathematical basics for computer graphics で検索してください．

また，スライドを全部印刷すると，分量がこの原稿に与えられたページ制約を超えてしまうので，後半，すなわち第 3 章から後の部分は表題は残しつつ中身は一部削ってあります．より興味のある方は `http://mcg2.imi.kyushu-u.ac.jp/english/news.php` に置いてある SIGGRAPH2016 や 2014 のスライドも参照してください．

謝辞

安生健一さんに感謝します．

- コンピュータグラフィックスと数学
- 九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所

  落合啓之
- 日本数学会 市民講演会@岡山 2018.9.23

·CGと数学

- では早速、CG
- 質問１：CGはコンピュータが

  自動で作ってくれるか？

- コンピュータグラフィクスは人が作る。
- 人手がかかっている。

- 質問２：CGって何？
- C[G] や C(G) ではない。

- CG：意図→画像

- CG：意図→画像
- 画像認識：画像→意味
- 画像処理：画像→画像

- ものの定め方
- 定義
- 典型例
- 比べる：ボロノイ図

- 質問３：3DCGの出力は3D？
- 補足：最終的に作られるものは

- 画像や映像は2D

- 映像や画像の特性・特徴とは？
- 例えば、素数や指数関数とはどう違うのか？
- 理学と工学

- 質問４：CGで動いているのは何？
- 写ってないもので動いているものは？

・カメラ

- 映像制作：(被写体、光、カメラ)→画像

・撮影：3D→2D

カメラ

- ３次元再構成：2D →3D

コンピュータビジョン

コンピュータに網膜の機能を持たせる。

- CG制作のワークフロー（手順）
- モデリング
- （アニメーション）
- 投影、レンダリング
- 画像処理

・質問５：CGによる映像制作は写実性が目標？

- そうとも言えるし、
  そうでないとも言える。
- 「今回のCG、よくできてましたね」

- インフラ
  水や安全はタダ
- フィリック入力

- 訴求するCG
- NPR(non-photorealistic rendering)
- データ可視化(scientific visualization)

- PR vs NPR = 写真 vs 絵
- 強調、省略

・可視化

- Scientific visualization ：対象が科学技術データ
  医学、生物学、地球、気象、量子、機械、、、
- オゾンホールの可視化

- 写実性に関する答（暫定）
- NPR： 実写と同じゴールを目指していない
- 可視化：比較すべき実写がない

・質問６：煙や炎のCGでは写実性ファースト？

- 質問６：煙や炎のCGでは写実性が最優先？
- 煙は Navier-Stokes 方程式の解
- 正攻法：逆問題を解く。（難しい）
  出力の要請に合わせた初期条件を見つける。

- 炎の作成、煙の合成
- そうやって作ったものはNavier-Stokes 方程式を厳密には満たしていないのでは？　　　　　その通り。
- それってマズくないの？

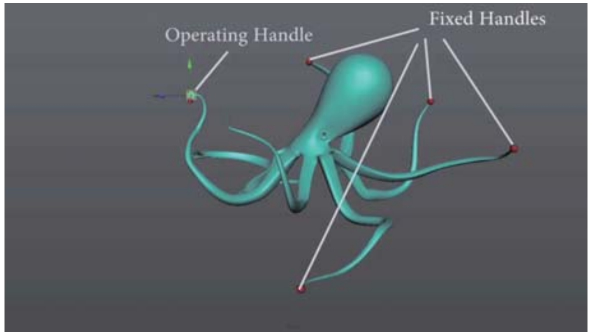
- 真の値からのズレ＝誤差。深刻？
- 物理的工学的真実と現実感のズレ。
- 人間はどこに不自然さを見出しているか？
  L^2 ノルム？　わかりません。

- 煙や波などの流体：作りやすさ
- 意図を表現しやすい作り方
- 監督本人が作るのではない。　アニメータ、アーティスト、CG技術者。「リガー」

Cage-based deformation: How to Use?

A Case Study: Poisson mesh edit: + the Log-Exp technique

- Shape design at keyframes



- 物理との違い
- 宇宙での爆発シーン
- 演出：強調と省略

- 人間にとって不自然さに気づきやすいもの。
- 研究のトレンドでもある。
- 爆発（煙、炎）、波
- 群衆の動き
- 髪の毛、洋服

- 数学とは
- 問題を解く
- 問題を作る（立てる）
- 答えを書くための概念や数を用意する。

後半：行列の指数関数

2.1. ２次元の回転

2.2. ２次元の平行移動

- 原点を中心とした２次元の回転は線形変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ y\sin\theta + x\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 回転行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ポイント：

回転行列は行列の指数関数で書ける

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

- 指数関数はテーラー展開を持つ:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

- 例:

実数の指数関数 $\quad y = e^x$

複素数の指数関数 $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

指数関数

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

行列の指数関数の定義

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots$$

$$I = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXPONENTIAL : ROTATION

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

応用：指数法則

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta_2 \\ \theta_2 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ \theta_1 & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -(\theta_1+\theta_2) \\ \theta_1+\theta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

指数法則

$$\exp(sA)\exp(tA) = \exp((s+t)A) \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

one-parameter 部分群（A に対応した）

3. ３次元の回転

３次元回転の表し方

① オイラー角

② SO(3) 特殊回転群

③ 軸と角度

3-1

④ 四元数

3-2

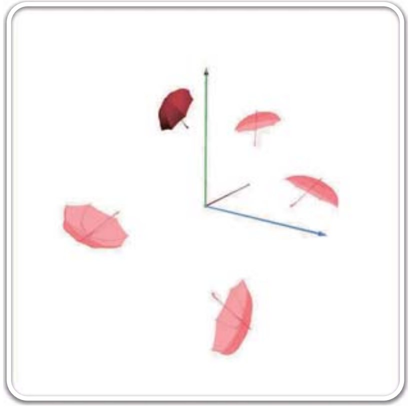
3-2. 四元数による３次元回転の表示

3-3. Slerp (球面線形補間)

- Spherical linear interpolation
- 補間公式

$$\mathrm{slerp}(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} q_1$$

$$\theta = \mathrm{Arccos}(\mathrm{Re}(q_1 q_0^{-1}))$$



- 補間公式

$$\mathrm{slerp}(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} q_1$$

- 不変性

$$\mathrm{slerp}(q_0, q_1, t) = \mathrm{slerp}(1, q_1 q_0^{-1}, t) q_0$$

指数写像

$$\mathrm{slerp}(1, \exp(\theta\mathbf{u}), t) = \exp(t\theta\mathbf{u})$$

計算！

$$\exp(\theta\mathbf{u}) = \cos\theta + (\sin\theta)\,\mathbf{u}$$

$$\begin{aligned}\exp(t\theta\mathbf{u}) &= \cos t\theta + (\sin t\theta)\,\mathbf{u} \\ &= \cos t\theta + (\sin t\theta)\frac{\exp(\theta\mathbf{u}) - \cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin t\theta}{\sin\theta}\exp(\theta\mathbf{u}) \\ &= \mathrm{slerp}(1, \exp(\theta\mathbf{u}), t)\end{aligned}$$

$$\mathrm{slerp}(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} q_1$$

3-4. 双四元数と３次元の運動

Dual Quaternion and 3D motion

3-4 | **Dual quaternion versus quaternion**

純虚四元数 $bi + cj + dk$	長さ1の四元数 $q \in \mathbb{H},\ \lvert q\rvert = 1$	3次元回転
純虚双四元数 $\hat{\theta}\,\hat{\mathbf{s}}$	長さ1の双四元数 $\hat{\mathbf{q}} \in \hat{\mathbb{H}},\ \lVert\hat{\mathbf{q}}\rVert = 1$	3次元運動

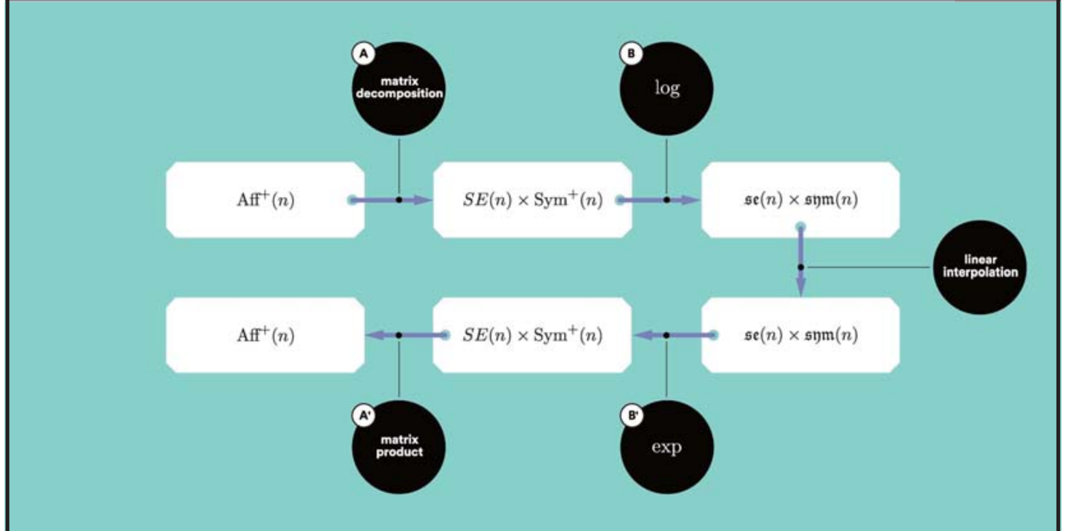
4. 補間

- **アフィン変換を使った補間**

5. Applications

2次元大域変形

Log-Exp interpolation for n = 2 and 3



- 個別ではなく集団で考える。
- 点の座標そのものではなく運動・変換を考える。
- 行列を分解する。あとで掛け合わせる。
- 指数関数対数関数で平らなところへ行く。
- 平らなところでは線形補間。

6. ご質問をどうぞ