会員ニュース

中島啓氏の朝日賞受賞を祝して

神戸大学理学研究科
吉岡　康太

中島啓氏が 2016 年度朝日賞を受賞されました．受賞題目は「幾何学的表現論と数理物理学への展開」です．中島さんには日ごろから親しくしていただいており受賞は大変喜ばしく，心よりお祝い申し上げます．中島さんの業績は国内外で大変高く評価され，これまでにも Cole Prize in Algebra, 日本学術振興会賞，日本学士院賞など数多くの賞を受賞されており，優れた研究者の方々によりいろいろな立場から業績が詳しく紹介されていますので，私の力量のせいでもありますが，主にゲージ理論とくに共同研究に関連する業績について述べさせていただきます．

まず中島さんの業績で最も重要なものの一つである箙多様体の構成について簡単にふれたいと思います．この箙多様体とは中島さんによる命名で，微分幾何学や代数幾何学において重要な研究対象である超ケーラー多様体の豊富な例を与え，また表現論の研究や Nekrasov 分配関数とくにプレポテンシャルの数学的な定義など素粒子理論にもかかわる基本的で重要な研究対象です．この箙多様体は中島さんによる 4 次元 ALE 空間（複素解析的には複素曲面上の有理 2 重点を特異点解消したものやその複素構造の変形など）上のインスタントンのモジュライに関する研究がもとになっています．中島さんはもともとインスタントンや Einstein 計量など微分幾何学の分野で著しい業績を上げており，Einstein 計量の研究から自然な流れで，4 次元 ALE 空間やその上のインスタントンのモジュライ空間を研究されました．とくに Kronheimer と共同でモジュライ空間をある種の箙で表示し (Atiyah，Drinfeld，Hitchin，Manin(ADHM) 表示の類似)，ご自身がいろいろなところに書かれているように ICM90 のあたりで Lusztig の研究の重要性を認識し，関連性を忍耐強く追及したことが箙多様体の構成とそのホモロジー群上に correspondence の手法でさまざまな代数の表現を構成することにつながったようです．とくに量子アフィン環の表現を箙多様体の同変 K 群上に構成し，既存の方法では得られない数々の重要な結果を得ています．またあとで述べるように中島さんの表現の構成は Witten など理論物理学者の注目を集めました．このほかに同様な手法で代数幾何的対象である代数曲面上の点のなす Hilbert scheme を一斉に考え，そのホモロジー群が Heisenberg 代数の既約表現であるこ

とを示し，代数幾何と表現論に大きな影響を与えました．

次に Yang-Mills ゲージ理論に関する中島さんの成果を詳しく述べたいと思います．ここでのゲージ理論は数学におけるゲージ理論でベクトル束上の接続のモジュライ理論です．4 次元ユークリッド空間上の枠付きインスタントン（反自己双対接続）は有名な Atiyah，Drinfeld，Hitchin，Manin らの仕事により行列（箙）によりあらわされ (ADHM 表示)，そのモジュライ空間が構成されます．このモジュライ空間の微分幾何学的部分コンパクト化（Uhlenbeck コンパクト化）は特異点をもつのですが，中島さんは箙多様体として捉えることによりその特異点解消を構成しました．さらに複素平面と同一視のもとこの特異点解消が代数幾何学的部分コンパクト化（Gieseker コンパクト化）である枠付き torsion free 層のモジュライに他ならないことを示し，代数幾何的対象と微分幾何的対象を結びつけました．この仕事はのちに Nekrasov の仕事によりゲージ理論におけるプレポテンシャルの数学的な定式化に使われる大変重要なものです．

ここで Donaldson の理論について少し説明したいと思います．この理論は 80 年代中ごろ Donaldson によって始められた理論で，Yang-Mills インスタントンのモジュライ空間を使って 4 次元多様体の強力な不変量を構成するというものです．Donaldson により証明された小林-Hitchin 対応により，代数曲面の場合にはインスタントンは安定ベクトル束を考えることにほかならず，微分幾何学にとどまらず代数幾何の観点からも大いに注目を集め，インスタントンのモジュライや 4 次元多様体の構造に関して多くの著しい結果が得られました．Donaldson の作った不変量（Donaldson 不変量）の性質に関しては，Kronheimer と Mrowka が単純型という仮定のもと Donaldson 不変量の母関数が basic class（今でいう Seiberg-Witten 類）で表されることを示し，また Fintushel と Stern は Donaldson 不変量が複素射影平面との連結和をとったときのふるまい（複素曲面を Blow-up したときのふるまい）を楕円関数を使って記述しています．そのほかにも，Göttsche により計量への依存性を表す壁越え公式がモジュラー形式で表されました [1]．ただこれらの結果は幾つかの制約から楕円関数やモジュラー形式の満たす微分方程式を導出するというもので，数学的には厳密だが，なぜ楕円関数が現れるのかが分からない証明でありました．そのほかに安定層のモジュライ空間のベッチ数やオイラー数も母関数を考えると具体的に書き下すことができ，場合によってはモジュラー形式で書きあらわされることが特別な代数曲面の場合に示されました．そのような時期に中島さんは 4 次元 ALE 空間上のインスタントンのモジュライ空間の場合に，アフィンリー代数の既約表現を構成しその帰結としてモジュラー

[1] Kotschick-Morgan 予想を仮定している．

形式が現れるという，非常に美しい結果を示していました．

一方物理のほうでは Witten らがゲージ理論の双対性という考えを発展させ，数学的には安定層のモジュライ空間のオイラー数の母関数がモジュラー性をもつことを導き，その重要な証拠として中島さんのアフィンリー代数の既約表現の構成を取り上げたため，中島さんの研究は大いに注目されました．また階数が 1 の場合に相当する点の Hilbert scheme のオイラー数の母関数が Heisenberg 代数の表現の指標になっていることを指摘し，この事実は中島さんによる Heisenberg 代数の既約表現の構成につながりました．

Witten らはまた Donaldson 理論においても双対性が重要であることを示しました．すなわち Seiberg といっしょに Donaldson 不変量を双対性の観点から解釈し，もっと簡単な不変量である Seiberg-Witten 不変量を見つけたことは大変衝撃的な出来事でした．また（物理における）ゲージ理論のプレポテンシャルが，Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる楕円曲線族のある種の周期により計算できることを見出しました．更に Moore と Witten はその応用として Donaldson 不変量の壁越え公式など重要公式をプレポテンシャルを使って記述し，また Kronheimer-Mrowka の結果の精密化，つまり Donaldson 不変量の Seiberg-Witten 不変量による記述 (Witten 予想) を得ました．この事は，なぜ Donaldson 不変量に楕円関数やモジュラー形式が現れるのか？ という疑問に対する素粒子理論による説明を与えます．これらの結果を数学的に正当化することは重要な問題でしたが，出発点であるプレポテンシャルを数学的にどう定式化するかが，そもそも大問題でした．この時点では，数学的にはある種の周期積分から定義される関数としかとらえられなかったのです．

当時の中島さんはこれらゲージ理論とモジュラー形式の関係を数学的に理解したいと思い，その一歩としてこれまでの中島さんの結果をさらに一般化することを試みていたように思います．一方，私は安定層のモジュライ空間のベッチ数やオイラー数のついて研究していて，特に Blow-up をした時の不変量のふるまいを表す Blow-up 公式などを得ていました．その縁で中島さんと親しくなり，97 年ころ中島さんが京都に移られたあたりから Blow-up がモジュライ空間にどういう影響を与えるかについて一緒に研究させていただくことになりました．

Blow-up は局所的な操作のため，オイラー数の Blow-up 公式や Donaldson 不変量の Blow-up 公式を複素平面とその Blow-up の場合に導くことを目標に研究を進めました．まずモジュライ空間としては，中島さんにより構成された複素平面上の枠付き torsion free 層のモジュライ空間と Blow-up 上での類似を利用し，方法はトーラス作用に関する局所化公式を使いました．ただオイラー数の間の関係は比較的早く得られましたが，Donaldson

不変量については非コンパクトゆえの困難さから局所化公式の適用方法に問題がありうまくいかず，しばらく保留になっていました．

2002 年ころ Nekrasov は物理的考察から複素平面上の枠付き torsion free 層のモジュライ空間を使ってプレポテンシャルを定式化することを考えました．詳しくいえば，インスタントトンのモジュライ空間の Uhlenbeck コンパクト化やその特異点解消である枠付き torsion free 層のモジュライ空間にトーラスの作用を考え，同変ホモロジー群から作られる関数（Nekrasov 分配関数）から周期により計算されるプレポテンシャルが取り出せることを予想しました (Nekrasov 予想)． ここで中島さんが特異点解消を枠付き torsion free 層のモジュライ空間として構成したことが大変重要な役割を果たします．この予想を知った中島さんは，Nekrasov の定式化 (つまり Nekrasov 分配関数に着目すること) が Blow-up 公式を考える上での正しい定式化であることを直感し 2003 年初めから，今度は Nekrasov 分配関数との関連で Blow-up 公式を捉え，数か月のちには同時に Blow-up 公式と Nekrasov 予想の証明を得ました[2]．プレポテンシャルの数学的な定義が得られたので，その後 Göttsche にも協力してもらって代数曲面の場合に壁越え公式や Witten 予想を解決し[3]，部分的に Donaldson 不変量とプレポテンシャルを関連付けることができました．これらの仕事には望月拓郎さんによる Donaldson 不変量に関する膨大な研究，とくに Donaldson 不変量の Nekrasov 分配関数と Seiberg-Witten 不変量による記述が極めて重要です．

これまでの共同研究を振り返って思うのは，中島さんの数学や物理の関連分野における広範で深い理解が研究上大変重要であったことです．また私は文献を読むのが遅いのですが，中島さんは分厚い文献も次々と読みこなしそれらを研究に役立てるので，私は中島さんの書かれたわかりやすい文章を通してそれらの文献の内容のうち我々の研究に必要な部分を理解していたように思います．ほかに中島さんはものごとを先の先まで見通すことができるようで，中島さんの言うことはあとで振り返ってみると些細な間違えはあったとしても大筋であっています．平凡な私が順番に一歩一歩理解していく以外に先に進めないのとは大違いです．きっと中島さんは私にはまったく想像のつかない豊かな数学の世界が見えているのだろうと思います．最近は AGT 予想という新たな視点からモジュライ空間のホモロジー上への表現の構成問題にアプローチし目覚ましい結果を得ています．また 90 年代から考えていたことのようですが，クーロン枝など新たな研究もされています．今後もますますご活躍されることを心よりお祈りします．

---

[2] Nekrasov の予想は Nekrasov-Okounkov，Braverman-Etingof らによる証明もある．

[3] Feehan-Leness により代数曲面を含むある種の可微分多様体についても解決されている