齋藤秀司氏の Humboldt 賞受賞によせて

中央大学理工学部
佐藤　周友

昨年 10 月に，齋藤秀司氏が Humboldt 賞を受賞されたという大変喜ばしいニュースが日本数学会を駆け巡りました．Humboldt 賞はドイツの Alexander von Humboldt 財団が主催する学術賞で，毎年各分野の重要な業績を挙げた研究者に贈られる，非常に栄誉ある賞です．齋藤氏は今年で還暦をお迎えになられますが，節目の年にさらに大きな花を添えることとなりました．私も氏に学んだセミ生の一人として，絶えず挑戦的で憧憬してやまない氏に敬意を表し，心よりお祝い申し上げます．この原稿では，齋藤氏の数あるご業績のうち，特に今回の栄えある受賞と関わりが深いものをご紹介いたします．

1　高次元大域体の相互律

古典的類体論は，有限体上の代数曲線の関数体 K あるいは代数体 K（いわゆる大域体）のアーベル拡大の性質などを記述する理論で，現代整数論の基礎です．主定理のうち最も代表的なものは，K の最大アーベル拡大体を K^{ab} と表すとき，ガロア群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ という「外的な」不変量 [1] を，K のイデール類群 [2] とよばれる「内的な」不変量で記述する，高木・Artin の相互律です．やや粗っぽい説明になりますが，古典的な類体論と同様の問題意識で有限体上の代数多様体の関数体 K や代数体上の代数多様体の関数体 K（いわゆる高次元大域体）を研究するのが高次元類体論です．

高木・Artin の相互律の拡張である高次元大域体の相互律は，1980 年代に Spencer Bloch 氏，加藤和也氏，齋藤秀司氏らによって確立されました ([2], [11], [12], [13], [17], [18])．このとき高次元大域体のイデール類群として導入された不変量は，Nisnevich 位相とよばれるある種の Grothendieck 位相に関する層係数コホモロジーでした．これは高次元大域体 K の内在的な不変量であるものの，生成元である 0 サイクルたちの間の関係式を具体的に書き表すのはかなり困難でした．

このような「分かりづらさ」があったのは事実ですが，当時完成された高次元大域体の相互律はとても美しく，これ以上の精密化は期待できないだろうと誰もが思いました．

[1] K^{ab} という抽象的な体に依存した群という意味．K を具体的に与えたとき，K^{ab} を具体的に記述できるか，という問いも類体論の問題意識の一つで，K が有理数体の場合は円分体論，K が虚二次体の場合は虚数乗法論である．一般にはさらに難しい．

[2] K をさまざまな付値で完備化した体（K の局所体）たちを用い，極めて具体的に定義される．

そのためか，それからの十数年間，高次元大域体の相互律の研究は世界的にやや下火になります．この間の齋藤氏のご研究については次節以降でご説明しますが，それはさておき，1980 年代から 20 年近く経った 2000 年前後に，二つの新しい成果がありました．一つは Alexander Schmidt 氏と Michael Spiess 氏によるもので，有限体上のスムーズな開多様体 [3] の境界で順分岐を許したエタール基本群（順分岐基本群）を Suslin ホモロジー [4] で記述しました ([20], [19])．もう一つは Götz Wiesend 氏によるもので，高次元大域体のイデール群の記述を著しく簡略化にするための重要で簡明なアイデアを与えました ([22])．どちらも高次元類体論をよく知る研究者たちの間では — 筆者もその一人なのですが — 出版前から大注目の話題であったのを覚えています．非常に残念なことに，Wiesend 氏はその後間もなく夭逝なさいましたが，彼のアイデアを見事に昇華させたのが他でもない齋藤秀司氏と Moritz Kerz 氏でした．両氏は有限体上のスムーズな開多様体 X の境界での分岐にモヂュラス [5] で制限を付けたエタール基本群（モヂュラス基本群）をモヂュラス Chow 群 [6] で完全に記述しました [15]．この結果は前述の Schmidt-Spiess の結果の強力な拡張になっているのですが，齋藤氏と Kerz 氏はさらにこの結果から，スムーズ ℓ 進層の存在に関する Deligne 予想 ([5] 参照) が階数 1 の場合に正しいことを導きました [15]．このことはイデール類群を簡明に記述することがいかに重要かを物語っています．

2　高次元の Hasse 原理（加藤予想）

古典的な類体論の主定理の一つに Brauer 群（体上の中心的単純環の相似類群）の Hasse 原理があります．大域体 K の Brauer 群 $\mathrm{Br}(K)$ の元 ω に対し，「$\omega = 0$ である（すなわち，ω を代表する K 上の中心的単純環 A が K 上の行列環に同型である）」ことは，「すべての素点 v について，$\mathrm{Br}(K_v)$ への制限 $\omega|_{K_v}$ が 0 である（すなわち，$A \otimes_K K_v$ が K_v 上の行列環に同型である）」ことと同値である，という主張です．

論文 [10] において加藤和也氏は，d 次元大域体 [7] に対し，Brauer 群の代わりにある係数の $d+1$ 次ガロアコホモロジー $H^{d+1}(K)$ [8] を考えることにより，前述の Hasse 原理の拡

[3] スムーズな多様体のままコンパクト化できるものを考えている．

[4] Suslin が 1987 年に提唱した代数多様体の不変量．後の Voevodsky による混合モチーフの三角圏の構成に大きな影響を与えた．

[5] モヂュラスは開多様体の正規なコンパクト化 $\overline{X}$ 上の有効 Cartier 因子 D で，台が補集合 $\overline{X} \smallsetminus X$ に等しいもの．正確には，そのような D が存在するようなコンパクト化 $\overline{X}$ を予め考えている．

[6] モヂュラスで制限をつけた有理同値で 0 サイクルたちの間に同値関係を定め，剰余群をとったもの．

[7] 代数体上の $d-1$ 次元多様体の関数体，あるいは有限体上の d 次元多様体の関数体を d 次元大域体とよぶ．

[8] K の標数が $p > 0$ の場合は，ある p 準素なねじれ群を係数とする 1 次ガロアコホモロジーを直和因子

張にあたる予想[9]を定式化し，$d=2$ の場合に正しいことを証明しました．$d \geqq 3$ の場合は加藤予想とよばれ，1980 年代後半以降の高次元類体論の中心的な問題の一つとなりました．1990 年代に大学院生時代を送った筆者にとっては，Jean-Louis Colliot-Thélène 氏，Uwe Jannsen 氏，齋藤秀司氏らがこの予想に挑戦し ([4], [6], [7]) 解決に向けて徐々に前進していく様はこの上なく眩しく，ただただ瞻仰するばかりでした．実は現在においても，加藤予想は未だに全てが解決されたとはいえないのですが，それでも Jannsen 氏，齋藤氏，Moritz Kerz 氏らの貢献によってかなりの結果が得られています．例えば，d 次元大域体 K の標数が $p>0$（すなわち K が有限体上の d 次元多様体の関数体）の場合に，位数が p と素な元 $\omega \in H^{d+1}(K)$ に対する加藤予想を齋藤氏と Kerz 氏 [14] が完全に解決し，一般の元 ω に対しては，特異点の還元を仮定すれば正しいことを Jannsen 氏 [6] が証明しています[10].

3　高次 Chow 群の有限生成性

高次 Chow 群は因子類群を一般化した不変量で，代数的サイクル（既約閉集合の有限形式和）を用いて定義されます [3][11]．位相多様体に対する特異ホモロジーの類似とみなすこともできますが，特異ホモロジーと大きく異なるのは，群としての大きさがほとんどの場合に全く分からないということです．数論幾何の基本予想として，$\mathbb{Z}$ 上の有限型な正則スキームの高次 Chow 群は常に有限生成アーベル群であろうと期待されています．この予想は，$\mathbb{Z}$ 上有限型な正則スキームの代数的 K 群が有限生成アーベル群であろうという予想（Bass 予想 [1]）の類似で，因子類群の場合に正しいことと，1 次元以下のスキームの場合に正しいことなどを根拠としています[12].

X を $\mathbb{Z}$ 上固有的で正則な d 次元連結スキームとするとき，X の関数体に対する前述の相互律や Hasse 原理[13]は余次元 d のサイクルの高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^d(X,q)$ $(q \geqq 0)$ に対

として付け加える．

[9]より正確には，K を関数体にもち，$\mathbb{Z}$ 上固有的であるような正則スキーム X を考え，X のすべての点の剰余体のガロアコホモロジーを用いて構成された複体を考える．加藤氏はこの複体を初めて導入し，Hasse 原理を定式化した [10]．いうなれば，単なる「K の Hasse 原理」ではなく，「X の Hasse 原理」であり，加藤氏が 2 次元の場合に証明したのは後者の意味である．本文で述べる加藤予想に関する結果は，すべて「X の Hasse 原理」に関するものである．

[10]$d \leqq 4$ ならば，特異点の還元を仮定しなくてよい [21], [14]

[11]スキーム X と q 次元アフィン空間 $\Delta^q = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}[t_0,t_1,\ldots,t_q]/(t_0+t_1+\cdots+t_q-1))$ のファイバー積 $X \times \Delta^q$ 上の余次元 n の代数的サイクルから作られる高次 Chow 群を $\mathrm{CH}^n(X,q)$ と表す．$q=0$ の場合は通常の Chow 群であり，特に $(n,q)=(1,0)$ の場合が因子類群である．

[12]因子類群の場合は Mordell-Weil の定理と Néron-Severi 群の有限生成性などによる．1 次元以下のスキームの場合は，Quillen による [16].

[13]脚注 9 で述べた，「X の Hasse 原理」を指す．

する Bass 予想と深く関わっています．実際，$\mathrm{CH}^d(X,0)=\mathrm{CH}_0(X)$（0 サイクルの Chow 群）の有限生成性 [14] は不分岐類体論の主張の一部であり，高次元大域体の相互律に関する Bloch 氏，加藤氏，齋藤氏らの一連の研究で証明されました ([2], [11], [18])．加藤氏は X が有限体上の（非特異完備）曲面の場合に，Hasse 原理から $\mathrm{CH}^2(X,q)$ ($q \geqq 1$) のねじれ部分 $\mathrm{CH}^2(X,q)_{\mathrm{tors}}$ の有限性が得られることを示し，Hasse 原理が $\mathrm{CH}^d(X,q)_{\mathrm{tors}}$ の有限性と関係があることを示唆しました [10]．齋藤氏と Kerz 氏は，加藤氏の示唆をより明確に高次 Chow 群からエタールコホモロジーへのサイクル写像の言葉で表現し，X が標数 $p>0$ の有限体上の d 次元（非特異完備）多様体の場合に先述の加藤予想に関する結果（Hasse 原理）を用い，ねじれ部分 $\mathrm{CH}^d(X,q)_{\mathrm{tors}}$ ($q \geqq 1$) の有限性を p 準素部分を除いて証明しました [14] [15].

4　最後に

来年 3 月 26 日から 30 日にかけて，齋藤氏の還暦を祝し，研究集会「Motives in Tokyo — on the occasion of Shuji Saito's 60th birthday」が東大数理にて行われます．齋藤氏は現在も Bruno Kahn 氏，山崎隆雄氏らと共に相互律層の理論，モヂュラス付きモチーフの理論 [8], [9] を創り出される等々，氏のご研究はとどまるところを知りません．今後の益々のご活躍をお祈り申し上げます.

参考文献

[1] Bass, H.: Some problems on classical algebraic *K*-groups. In: Bass, H. (ed.) *Algebraic K-theory II —"Classical" Algebraic K-theory, and Connections with Arithmetic*, Lecture Notes in Math. 342, pp. 3–73, Springer, New York, 1973

[2] Bloch, S.: Algebraic *K*-theory and classfield theory for arithmetic surfaces. Ann. of Math. (2) **114**, 229–265 (1981)

[3] Bloch, S.: Algebraic cycles and higher K-theory. Adv. Math. **61**, 267–304 (1986)

[4] Colliot-Thélène, J.-L.: On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields. In: Goerss, P. G., Jardine, J. F. (eds.) *Algebraic K -theory and algebraic topology, Lake Louise, 1991*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 407, pp. 35–55, Kluwer, Dordrecht, 1993

[5] Esnault, H., Kerz, M.: A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne). Acta Math. Vietnam. **37**, 531–562 (2012)

[14] X が $\mathbb{Z}$ 上平坦ならば，$\mathrm{CH}^d(X,0)$ は有限アーベル群である．そうでない場合には階数 1 の有限生成アーベル群である.

[15] $d \leqq 4$，あるいは特異点の還元を仮定すれば，p 準素部分も込めてねじれ部分が有限である ([10], [21], [6], [14]).

[6] Jannsen, U.: Hasse principles for higher-dimensional fields. Ann. of Math. (2) 183, 1–71 (2016)

[7] Jannsen, U., Saito, S.: Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields. Documenta Math. *Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday*, 479–538 (2003)

[8] Kahn, B., Saito, S., Yamazaki, T.: Reciprocity sheaves. Compositio Math. **152**, 1851–1898 (2016)

[9] Kahn, B., Saito, S., Yamazaki, T.: Motives with modulus. `https://arxiv.org/abs/1511.07124`

[10] Kato, K.: A Hasse principle for two-dimensional global fields. J. Reine Angew. Math. **366**, 142–183 (1986)

[11] Kato, K., Saito, S.: Unramified class field theory of arithmetical surfaces. Ann. of Math. (2) **118**, 241–275 (1983)

[12] Kato, K., Saito, S.: Two-dimensional class field theory. In: Ihara, Y. (ed.) *Galois groups and their representations, Nagoya, 1981*, Adv. Stud. Pure Math. 2, pp. 103–152, North-Holland, Amsterdam, 1983

[13] Kato, K., Saito, S.: Global class field theory of arithmetic schemes. In: *Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Boulder, 1983*, Contemp. Math. 55 Part I, pp. 255–331, Amer. Math. Soc., Providence, 1986

[14] Kerz, M., Saito, S.: Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **115**, 123–183 (2012)

[15] Kerz, M., Saito, S.: Chow group of 0-cycles with modulus and higher-dimensional class field theory. Duke Math. J. **165**, 2811–2897 (2016)

[16] Quillen, D.: Finite generation of the group K_i of rings of algebraic integers. In: Bass, H. (ed.) *Algebraic K-theory I — Higher K-theories*, Lecture Notes in Math. 341, pp. 179–198, Springer, New York, 1973

[17] Saito, S.: Class field theory for curves over local fields. J. Number Theory **21**, 44–80 (1985)

[18] Saito, S.: Unramified class field theory of arithmetical schemes. Ann. of Math. (2) **121**, 251–281 (1985)

[19] Schmidt, A.: Tame class field theory for arithmetic schemes. Invent. Math. **160**, 527-565 (2005)

[20] Schmidt, A., Spiess, M.: Singular homology and class field theory of varieties over finite fields. J. Reine Angew. Math. **527**, 13–36 (2000)

[21] Suwa, N.: A note on Gersten's conjecture for logarithmic Hodge-Witt sheaves. *K*-theory **9**, 245–271 (1995)

[22] Wiesend, G.: Class field theory for arithmetic schemes. Math. Z. **256**, 717–729 (2007)