辻田辰之氏の井上研究奨励賞をお祝いして

京都大学大学院理学研究科
加藤　周

大変喜ばしいことに辻田辰之さんが第33回(2016年度)井上研究奨励賞を受賞されました．彼にとっては 2014 年度日本数学会賞建部賢弘賞奨励賞に続いての受賞となります(受賞題目は違いますが)．この賞は，過去3年間に理学・工学・医学・薬学・農学等の自然科学の基礎的研究において，新しい領域を開拓する可能性のある優れた博士論文を提出し，博士の学位を取得した，年齢が37歳未満の研究者に贈られるものです．本年度は40名が受賞しました．

辻田さんは，2010年3月に飛び級で京都大学大学院理学研究科に入学し，2012年3月に修士課程を修了，2015年5月に博士（理学)を取得しました．その間3年間(2012~2015年度)は，日本学術振興会特別研究員(DC1)でした．その後2016年3月まで京都大学において研究員として過ごされ、2016年4月に京都大学数理解析研究所の助教として採用され，現在は数理解析研究所で研究をされています．

辻田さんは学部時代，及び大学院の初年次には割と色々なことを勉強していて，数論，微分幾何，代数幾何など興味が割と色々と変わっていった関係で指導教員が変わったりしていました．筆者が辻田さんと初めて会ったときはKapustin-Wittenの幾何学的Langlands対応と数理物理の関係に関する論文を理解したいといったようなことを言っていたことを覚えています．そこで少し議論したのちに幾何学的Langlands対応にせよ数理物理にせよ具体的な数値的帰結がどのように生まれるのかがわかった方が良いのではないかという話になり幾何学的Langlands対応のアイデアの特別な場合ともみなせる(当時最終段階にあった) Bezrukavnikovと共同研究者たちによるLusztig予想の解決についての一連の論文などについてセミナーを行うことになりました(とはいえ，筆者は実際には教えてもらっていただけなのですが)．Lusztig予想と呼ばれる予想は複数あるのですが，ここで言っているのはその中で最も広がりの大きいもので，Kazhdan-Lusztig多項式(複雑ですが本質的にはシュミットの直交化法のアイデアにより具体的に求まる量)を数値的に実現するような(幾何学的佐武対応を土台とする複数の)幾何学的構成を軸として正標数の半単純リー代数の表現論をはじめとする多くの単純リー代数や対応するアフィン・リー代数の表現論を統制する枠組みのことです．

このLusztig予想において中心となる多様体のひとつはSpringerファイバーと呼ばれるものですが，そのaffine版(つまり、単純リー代数をアフィン・リー代数に変える構成)は(例えばBao Chao Ngoにより最終的に解決された基本補題などに現れる)

軌道積分と関係する非常に深い意味を持つ多様体です．表現論的にはその中で特殊なものがdouble affine Hecke環と呼ばれる代数の表現に対応し，さらに特殊なものが対角余不変式環と呼ばれる有限次元環とベクトル空間として同型であることが知られていました．後者はMacdonald多項式と呼ばれる多くの直交多項式を統一する多項式系と密接に関係する環で，特にその次数付きの指標構造を組み合わせ論的に書ききる為にAdriano Garsia，Mark Haimanらを中心とするアメリカ西海岸の研究者たちを中心に2000年代に多大な努力が払われていました．その中で生まれたのがいわゆるshuffle予想です．

辵田さんはその修士論文”Affine Springer fibers of type A and combinatorics of diagonal coinvariants”において特別なaffine Springerファイバーの構造をよくみると，そこにはshuffle予想を全ての(A型の) double affine Hecke環の既約表現から生じる同様の環に自然に拡張するような組み合わせ論的構造が潜んでいることを示しました．この結果はaffine Springerファイバーの研究及び対角余不変式環の組み合わせ論的研究のどちらから見ても非常に非自明であり，特に組み合わせ論の研究者たちにとってはshuffle予想の自然な枠組みを再考する契機となったようで辵田さんの論文の後に活発に論文が出てきました．また辵田さんも筆者も知らないところでサーベイなども行われていたようです(直接売り込めなかったという意味ではこれは元指導教員としての筆者の怠慢だったのかもしれません)．実際その中で導入された補助的な多項式は辵田多項式と呼ばれてそれ自体も研究対象となっているようです．(なお，現在shuffle予想については解決したというpreprintが出回っています．) また論文自体は(残念ながら極めて長い審査の後に) Advances in Mathematicsに掲載されました．

さて，辵田さんの今回の受賞理由にある錐的シンプレクティック特異点解消とは原点を持つある種のアフィン代数多様体の(特別な)特異点解消のことです．例えば上記のSpringerファイバーはSlodowy多様体と呼ばれる錐的シンプレクティック特異点の自然な特異点解消の原点におけるファイバーと思うことができます．他の例としては2次元アフィン平面の対称積(つまり，2n次元アフィン平面をn次対称群の作用で割ったもの)やより一般の中島箙多様体などがあります．表現論的観点から言えばこれは幾何学的量子化で得られる代数が半単純リー代数の最高ウェイト表現論に類似する表現論的構造を持つような枠組みであり，単純リー代数の普遍包絡環やSlodowy多様体の幾何学的量子化である有限W-代数(とその表現論)の広汎な一般化であるということができます．この中でSlodowy多様体やSpringerファイバーは1970年代から研究されていましたが，Springerファイバー自体がもともと有限体上の簡約群(実際にはその有理点のなす有限群)の特別な表現の指標の幾何学的実現として研究が始まったという経緯もあり知られている大抵の良い結果は任意の型の単純リー代数について成立する形のものとなっています．

その中にあってA型Springerファイバーのコホモロジー環が正方行列全体をアフィン空間とみなしたときに固定された冪零ジョルダン標準型を持つ点全体の閉包と対角行列全体からなる部分多様体のスキーム論的交叉の座標環として書けるという1980年代のDe Conicini-Procesi-谷崎の結果は非常に綺麗なのにA型(つまり行列群)に対してしか成立せず他の単純リー代数へのナイーブな一般化が必ず反例を持つというかなり例外的なものでした．疋田さんはLusztig予想が成立する理由を上記のBezrukavnikovらによる証明を超えて理解しようとする過程の中でこのDe Concini-Procesi-谷崎の結果の正しい定式化は錐的シンプレクティック特異点解消に関する双対性(数理物理的にはミラー対称性の一種らしいです)であることを見出し，その定式化と上記のSlodowy多様体及び2次元アフィン平面の対称積，そしてhypertoric多様体と呼ばれる場合の証明を博士論文“On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolutions”にまとめました．De Concini-Procesi-谷崎の定理の視点から見ると，これは筆者の知る限りで初めての意味のある(そして非常に汎用性の高い)一般化です．

この結果は当時別の側面から研究が進められていたBraverman-Finkelberg-中島によるCoulomb枝の数学的定式化と非常に相性が良く，疋田予想(及びその量子化版)として彼らの定式化の中に取り入れられています．また，論文自体はInternational Mathematical Research Noticesから出版されました．この論文の結果の中で扱われているのは予想の定式化と上の3種類の例であり，各々の例の証明はかなり違うので筆者などは就職等の都合上別々に出版すれば良いとも思ったのですが疋田さんにとってはこれを複数のものと思うのは難しいようで説得には失敗しました．実際この研究ではまず方向性を立ててから予想の正しい定式化を見出すまで1年以上，そしてそこから上記の例が出揃うまでまた半年以上とかなり時間がかかっています．ですので疋田さんの研究能力及び研究上の忍耐力に舌を巻くことも確かながらもう少し小出しにすることも覚えた方が良いのではないかと若干心配もしています(一つの論文には一つのテーマという考え方は理想としては大いに共鳴するものですが)．

国外では幾何学的表現論を専門とするグループが複数あり，そういう人々が錐的シンプレクティック特異点解消の理論の発展の少なからぬ部分を担っているのですが，残念ながら国内でそういう研究をやっている人は(少なくとも表現論的側面からは)ほとんどいません．疋田さんはそういった状況の中で(上記の錐的シンプレクティック特異点解消の理論などを含む)さまざまな新しい理論の発展に独力でついてゆけることはもちろん，その中で独自の観点を持ちしかもそれを発展させられる力量を持った若手です．ですので筆者としてはあまり細かいことは言わず疋田さんにはともかく面白い，もしくは重要だと思ったことがらに関する理論を今後いろいろと築き上げていっていただければと期待しつつ筆を置かせていただかせていただければと思います．