書　評

日常現象からの解析学

岡本 久 著，近代科学社，2016 年

岡山大学大学院自然科学研究科
大下　承民

身の回りの現象を理解するために数学は様々な分野で応用されている．本書は，そのような身の回りの現象に現れる問題を数学により理論的に理解しようという，応用数学（応用解析）のテキストである．本書は著者がイントロで述べているように，様々な問題を紹介していくという「論語」のスタイルで書かれており，フーリエ解析，変分法，常微分方程式，偏微分方程式などの数学理論を解説するテキストではない．考察する問題としては，身の回りのものの形（曲線や曲面）に関するものが多いのが特長である．例えば，シャボン玉は表面張力で球形になり，天体は重力で丸くなるとか，水面や水滴の形を求めたり，電線の形が懸垂線で吊り橋の形が放物線であることなどである．最初の８章までは，等周問題，プラトー問題，最速降下線，幾何光学などの古典的な変分問題をカバーしている．後半の９章から１４章までは，ポワッソン方程式，熱方程式などの基本的な偏微分方程式や流体力学のオイラー方程式やナヴィエ・ストークス方程式について考察している．

数学の予備知識は多変数の微分積分ぐらいであり，フーリエ解析や偏微分方程式などの数学知識がなくても読めるように配慮して書かれている．本書ではもう一つ，高校レベルの初等的な物理概念の知識は仮定している．具体的には，力，圧力，張力，運動量，仕事，エネルギーなどである．界面エネルギー，表面張力，流体の運動方程式，力の釣り合い，力学的エネルギーの保存，運動量の保存，光の反射・屈折の法則など，物理的な考察もなされている．本書は主に微積分法を使って現象を理論的に理解することが目的であるが，図形の重心や幾何光学に現れる初等幾何の問題などでは微積を使わない解答に言及しているものもある．例えば，ニュートンのプリンキピアに出てくる「デカルトの問題」とニュートンの作図による解答などである．

本書の内容を簡単に紹介しよう．第２章では，４～５章で表面張力に関する問題を紹介するため，その準備として平面内の曲線の曲率および空間内の曲面の平均曲率について説明している．曲率については同値な定義を複数与えている．曲面の平均曲率は，接平面に直交する各平面との共通部分における曲線の曲率の平均として定義し，曲面が関数のグラフとして表されている場合の平均曲率の公式を与えている．さらに，曲率一定の平面曲線は円と直線のみであることを説明し，その後，平均曲率一定の空間内の閉曲面は球面のみであるという「アレクサンドロフの定理」を述べている．第３章では，図形の重心の定義とその意味を説明して，具体的な計算例を与えている．

第４章では，界面エネルギーと表面張力に関する物理的な考察をして，「ヤング–ラプラスの関係式」と呼ばれる平均曲率と表面張力と圧力の間の関係式を説明している．具体的には，表面の微小部分における表面張力の和が法線方向を向いて大きさが平均曲率と表面張力の大きさの積に比例することを示して，水滴が表面張力で球形になることを説明している．さらに，閉曲面に囲まれた領域の体積一定の条件の下で，曲面の表面積を最小にするものは球面である，という等周問題とその解答を述べている．現象への応用として，容器内の水面の壁際での形が，表面張力によって説明できること，また数式を使ってその水の表面の形を表す式を求めている．次に第５章では，表面張力に関する数学の問題として，「プラトー問題」を紹介している．これは空間内の閉曲線を境界とするような石鹸膜の形を考察する問題である．石鹸膜の表面積の第一変分が０であることから石鹸膜は極小曲面であることを導いている．このことは，ヤング–ラプラスの関係式で圧力差がないことからもわかる．プラトー問題の解の存在証明は，変分法の偏微分方程式への応用の一つであるが，本書のレベルを超えているため割愛されている．具体例として円形の針金２つの場合の懸垂面について述べている．第６章では，古典的な変分問題である「等周問題」を２次元で考察している．長さ一定の閉曲線で囲まれる部分の面積を最大にするものを求める問題は，条件付きの変分問題であり，変分法により求めることもできるが，本書ではフーリエ級数を使って等周不等式を証明している．有名な「ディドの問題」についても類似の不等式を証明している．フーリエ級数については後の１０章で詳しく説明している．さらに懸垂線とサイクロイドについての簡単な性質を述べている．電線の形は，曲線の長さ一定という条件の下で位置エネルギーあるいは重心の高さを最小にするという，条件付き変分問題の解として得られるのであるが，ここでは力（電線の張力と重力）の釣り合いの関係式から電線の形が懸垂線であることを示している．第７章では，古典的な変分法の入門として「最速降下線」の問題を考察している．次の章に出てくる，光の経路に関する「フェルマーの原理」と「屈折のスネルの法則」の関係を認めれば，スネルの法則から方程式を導くこともできるが，ここでは最速降下線がサイクロイドであることを変分法により導いている．第８章では，マクスウェルが１４歳のときに初めて書いた論文で考えた問題を説明している．楕円をある意味で拡張した曲線で光が屈折するときの，光の経路に関する問題である．以下，９章から１４章までは偏微分方程式の入門的な話になる．まず，第９章では，グリーンの公式，ガウスの定理，ストークスの定理など「ベクトル解析」の基礎的内容を説明している．ラプラス方程式，ポワソン方程式の境界値問題を考察して，グリーン関数を定義し，それを使って解の表示を与えている．証明にグリーンの公式を使っている．さらに後の章で流体力学を学ぶために必要となるストークスの定理を直感的に説明している．第１０章では，熱方程式の初期値境界値問題を考察している．フーリエ級数について説明し，ディリクレ境界条件やノイマン境界条件の下でフーリエ正弦級数展開，フーリエ余弦級数展開を使って解を求める．さらに，空間内に熱源がある場合に，時間無限大のとき解が平衡状態に収束することを示している．第１１章では，物理的考察から完全流体の仮説を説明

し，そこから流体のオイラー方程式を導いている．浮力に関する「アルキメデスの原理」がこのオイラー方程式から導かれることを示している．ただし，ガウスの定理などは使わずになるべくわかりやすく説明している．第１２章では，自転する天体の形を考察している．これはマクローリンが考えた問題である．遠心力と重力ポテンシャルの釣り合いから解を求める．回転楕円体の重力ポテンシャルを計算し，自転するときは回転楕円体になることを示している．自転しない天体の場合は球になる．第１３章では，粘性がある場合の基礎方程式であるナヴィエ・ストークス方程式を考察している．第１４章では，流体中を球や円柱が動くときの（PM2.5 のような）微小粒子の運動について考察している．これは，マクスウェルによって考えられた問題である．

以上のように，本書では放物体の浮力による安定性条件など一般に広く知られていない問題も多く扱われている．具体的に解ける問題も多く扱われていて，微分方程式の計算などで，数式がたくさん出てくるところもあるが，式変形が丁寧に書かれているので，計算を確認するのは難しくないと思う．本書のような変分法や流体力学は，地球科学科や工学系の学生には馴染みがあると思うが数学科の学生は学部で習うことはあまりないと思うので，おもしろいと思うかもしれない．

本書は，解の存在性などが数学的に重要であることはちゃんと説明しつつ，数学的な厳密性や詳細にはこだわり過ぎず，現象に関わる数学をなるべく直感的にわかりやすく説明し，論語のように色々な問題を紹介することにうまく成功している．自分の学生にはもちろんのこと，現象に関わる数学に興味がある人すべて（特に，多変数の微積分を学んだ理系の２〜３年生以上）に勧めたい．私自身がもし現象に関する数学の授業をする機会があれば，是非ともテキストとして使用したいと思う．本書を読み終えた後には，生命現象（フィッツフュー・南雲モデルなど）や材料科学（相分離現象，フェーズ・フィールドモデル）などその他の現象に関わる数学や反応拡散方程式（アレン・カーン方程式など），変分法の非線形偏微分方程式への応用など大学院レベルのより高度な内容にも興味を持って頂けるのではないかと思う．