

授賞報告

2017年度日本数学会代数学賞

2017年度日本数学会代数学賞は、橋本光靖氏(岡山大学自然科学研究科)、金子昌信氏(九州大学数理学研究院)、桂利行氏(法政大学理工学部)が授賞されました。

橋本光靖氏「不変式論およびその可換環論への応用」

橋本光靖氏の研究の目的は、群が作用する可換環およびスキームに対してその不変式環や商の環論的性質を調べることであり、橋本氏はこの方面で非常に優れた研究を行っている。

Hilbertの研究以来、不変式論は可換環論における重要なテーマの一つである。橋本氏は、特に不変式環の有限生成性やそのシジジー、その特異点や双対定理等に関して深く研究しているが、研究業績の中で特に優れているものをあげると、

- 群(スキーム)が作用する状況でのねじれ逆像と双対性
- 行列式イデアル等のシジジー
- 正標数の場合の代数群の表現と可換環論を関連させる研究

であろう。以下これらに関して、簡単に解説する。

「群(スキーム)が作用する状況でのねじれ逆像と双対性」について、双対化複体や標準束を定める際、Grothendieckによるねじれ逆像の理論が必要である。群作用と双対性との関連を研究しようとするれば、同変なねじれ逆像が必要となってくる。橋本氏は、平坦かつ有限型の群スキーム G の作用を持つネータースキームの間の分離かつ有限型な G 射について、同変なねじれ逆像を構成することに成功した。通常のねじれ逆像の構成にはコンパクト化が使われるが、同変なコンパクト化をとることができないことが困難な点であった。そこで、橋本氏は同変層を G に付随する単体的スキームの部分図式上の層としてとらえ、スキームの図式についてのねじれ逆像の特別な場合としてこれを実現し、固有射の双対性を証明した。続いて橋本氏は大溪正浩氏との共同研究で群スキームの作用のもとで同変局所コホモロジーを論じており、局所双対性の同変版を証明した。これらは、以下のように豊かな応用を持つ。 G が体 k 上の線型簡約な群スキームで $X \rightarrow Y$ が G の作用による幾何学的商でアフィン射、 X が Cohen-Macaulay ネータースキームとすると、 Y も Cohen-Macaulay ネータースキームであることを示した。渡辺敬一氏は有限群 G の不変式環の Gorenstein 性を論じているが、橋本氏はこの結果を同変ねじれ逆像を用いて有限群スキームの作用の場合に一般化を行った。また、藏野和彦氏との共同研究で、同変ねじれ逆像を用いて Cox 環の標準層の記述を行った。

「行列式イデアル等のシジジー」について、橋本氏は研究生活のスタートで、行列式イデアル等のシジジーについての研究を行い、顕著な業績をあげている。主な成果として、行列式イデアルの係数環によらない極小自由分解は、存在しないことを示したことが挙げられる。Koszul 複体、Eagon-Northcott 複体はある特殊なケースの行列式イデアルの係数環によらない極小自由分解であり、これらはホモロジー代数において“非常に使える”複体である。一

一般の行列式イデアルの係数環によらない極小自由分解が存在したなら、それもホモロジー代数において“非常に使える”複体であると期待されていた。多くの研究者がその構成にチャレンジしていたのであるが、橋本氏の研究によってそれは不可能であることがわかった。これは、当時非常に衝撃的な結果であった。 $m \times n$ 行列には左右から GL_m と GL_n が作用し、determinantal ring への作用を誘導するが、橋本氏の手法は（標数一般での）一般線型群の表現論を用いたものである。また、対称行列の行列式イデアル、交代行列のパフィアンイデアルに関しても、標数一般での一般線型群の表現論を駆使してシジジの研究を行っている。

「正標数の場合の代数群の表現と可換環論を関連させる研究」について、 k を代数閉体、 G を k 上の代数群、 V を G の有限次元表現、 $S = \text{Sym } V$ を対称多元環とし、 $A = S^G$ を G の作用による S の不変式環とする。橋本氏は G が簡約群のときに A が高々有理特異点をもつという Boutot の定理の正標数版について研究を行っている。正標数では G が簡約群でも一般には A は Cohen-Macaulay ですらないが、橋本氏は S が良いフィルター付けを持つならば A は F 正則であることを示した (F 正則は有理特異点の正標数版である F 有理より強い概念である)。のちに G の parabolic subgroup の unipotent radical による不変式環についても同じことがいえることを示している。これは、代数群の表現論と正標数の可換環論を不変式論を通して結びつける興味深い結果である。さらに、P. Symonds 氏との共同研究で、フロベニウス押し出しの分解の極限といえるものを考え、それを有限群の作用による不変式環について記述した。

このように橋本氏の研究は非常に重要で興味深いものであり、代数学賞にふさわしいものであるといえる。

金子昌信氏「準保型形式と多重ゼータ値の研究」

金子昌信氏は、ある意味で既成の分野に分類することが難しい、様々な研究を行っています。どれも斬新で、また、いささか不思議な印象を与える研究で、新しい分野を切り開き、また数学を豊かにしてきた業績は極めて大きいといえます。中でも、準保型形式 (quasimodular forms) と多重ゼータ値について多くの研究を行ってきました。

準保型形式というのは、複素上半平面上の 1 変数正則関数のうちで、志村五郎氏の定義した nearly holomorphic modular forms の非正則部分を切り取って得られる関数というのが大雑把な説明です。従って、準保型形式自身は通常の保型形式の満たす保型性は満たしません。しかし、準保型形式および保型形式のなす環は微分に対して閉じているなど、いろいろな面白い性質を持っています。このような関数に重要な意味があるかどうかは、定義からはただちに明らかではありません。しかし Robbert Dijkgraaf 氏は「楕円曲線のミラー対称性」、すなわち、楕円曲線のある種の被覆の母関数が準保型形式になるという予想を述べ、金子氏はこれを Don Zagier 氏との共同研究で数学的に厳密に証明しました。実際には準保型形式の定義および基本的性質が述べられたのはこの共著論文が最初です。この論文の反響は数学のみならず物理の方でも非常に大きく、これを引用した論文は、超弦理論、Gromov-Witten ポテンシャル、ファインマングラフ、量子幾何、などの物理的なタイトルを持っているものも多く、また、より数学的な論文での引用タイトルにも、頂点作用素代数、モックモジュラー、Coleman 族、ホッジ数、調和マース形式、quiver 多様体、ヒルベルトスキーム、多

重ゼータなどの多様な用語もみられ、その影響が幅広いだけでなく、アメリカ数学会の MathSciNet における引用件数も 100 件を超えています。これは整数論関係の単独論文としては非常に多いといえます。物理の自然な枠組みの中で準保型形式が自然に現れるというようなことは、おそらくは大部分の保型形式の専門家は、予想しなかったことであり、新しく豊かな分野を切り開いた業績は極めて大きいと言えます。また、楕円曲線の超特異不変量に関係して導入された、準保型形式を係数に含む 2 階の線形微分方程式は Kaneko-Zagier の微分方程式と呼ばれ、これもまた数多く引用されています。さらに小池正夫氏との共同研究では、準保型形式の解を具体的に記述するとともに、extremal な準保型形式を導入し、これが数論的にも興味深いという結果も導いています。

もうひとつの受賞タイトルの多重ゼータ値というのは、従来のゼータ関数の特殊値の定義の代わりに、さまざまな指数べきに対して多重に和をとって定義された値です。古くはオイラーまでさかのぼり、近年では Don Zagier 氏や Michael Hoffman 氏などが研究の先鞭をつけて大きく広まった分野です。金子氏は、故荒川恒男氏とともに、正の整数点での値が多重ゼータ値で書け、負の整数点での値に多重ベルヌーイ数が現れるある種のゼータ関数を導入しました。これは現在 Arakawa-Kaneko のゼータ関数と呼ばれ、 p 進化を始め様々な研究がなされています。(ここでの多重ベルヌーイ数は、従来のベルヌーイ数の母関数を対数関数を使った形に書き換え、その対数関数をポリログ関数に変更して定義される数であり、金子氏により定義されたものです。) 近年では津村博文氏との共同研究により、このゼータ関数の「姉妹版」も研究されています。また井原健太郎氏、Don Zagier 氏との共同研究で、多重ゼータ値の間の正規化複シャッフル関係式が示され、それと導分関係式の同値性が示されています。これは現在の多重ゼータ値研究のひとつの基本文献です。また、Herbert Gangl 氏および Don Zagier 氏との共同研究において、2 重ゼータ値とモジュラー形式との関係を明らかにし、その後のモジュラー形式と多重ゼータ値の関連の研究の先鞭をつけています。最近では、山本修司氏と共同で多重ゼータ値の新しい関係式の研究を行い、初等的な積分を級数で表す非常に単純なクラスの関係式がすべての線型関係式を与えるであろうという著しい予想を提出しています。また Don Zagier 氏との最近の共同研究では、「有限多重ゼータ値」の研究を行い、その実対応物を定義し、両者の間の関係を予想する「基本予想」を提出し大きな反響を呼んでいます。多重ゼータ値の現代的な研究が始まってから 20 数年、多くの研究、予想によって日本での多重ゼータ値研究を牽引してきており、金子氏による講義録も広く読まれています。

以上のように、金子昌信氏の研究は非常に重要で興味深いものであり、代数学賞にふさわしいものです。

桂利行氏「正標数の代数幾何学」

正標数の体上の代数多様体の研究が始められたころは、小平消滅定理が成立しないなど、標数が 0 では起こらないが正標数では起こり得る現象は、多くの数学者にとって病的なものとしてとらえられていた。しかし、正標数であるがゆえに存在するフロベニウス写像を用いた幾何学がセール氏により始められ、次第に正標数特有の世界が世の中に受け入れられつつある黎明期が、まさに桂氏が数学の研究に取り組んだ時期と一致する。桂氏の研究はブラウ

アー群などの数論的不変量やピカル群の交叉形式からえられるアルチン不変量を手掛かりとして行われた。桂氏の数学の中には一貫して、正標数代数多様体の幾何学にある特有の美しさが垣間見てとれる。氏の初期の仕事には「特異 K3 曲面は単有理か」というアルチン・塩田予想を動機としているものが多く、単有理性に関する研究が精力的におこなわれた。単有理であることを示すには有理曲面からの支配的写像を作ることが必要であり、一般的には難しく職人的な技術を必要とする問題である。K3 曲面の場合、このような支配的射は非分離被覆とならざるを得ないが、これらを統一的に構成するための手段との関連で、正標数のベクトル場による商に関する仕事もある。桂氏の研究をはじめ、アルチン・塩田予想は長年の懸案の大問題として多くの数学者の注目をひいていたが、近年リートケ氏、ペラ氏、シャルレ氏、マウリック氏により肯定的に解決されたことは記憶に新しい。桂氏の単有理性に関連する論文として楕円曲面の標準写像や正標数特有のワイルドな多重ファイバーに関する研究がそのあとに続く。楕円曲面に関しては上野健爾氏との共同研究も多い。

超特異 K3 曲面については、その特異性をさらに細かく計る不変量としてアルチン不変量が考えられるが、それが小さいものは正標数の特色がとくに色濃く反映されるものと考えられる。これらの具体的構成を様々な方法であたえたものとして、金銅誠之氏との共同研究がある。また、小平邦彦氏による曲面の分類理論において、K3 曲面と切っても切れない関係にあるもののひとつとしてエンリケス曲面があげられる。エンリケス曲面に関しては標数が 2 の時は標数が 0 の場合とかなり様子が異なるという点で特別な意味をもつが、これに関しては、近年金銅氏との共同研究において、有限の自己同型をもつ標数 2 のエンリケス曲面の分類が完成された。

正標数独特の超特異現象はアーベル多様体のモジュライの構造にも大きく影響している。これに関しては、桂氏は超特異アーベル多様体などがモジュライ空間の中でどのような形をしているかという問題について、多くの非常に精密な結果を得た。これらの中には数論の専門家である伊吹山知義氏、橋本喜一郎氏との共同研究も含まれる。その一例として主偏極アーベル曲面のモジュライ空間における超特異アーベル曲面の軌跡の既約成分の個数に関する業績がある。これはドイリンク氏や井草準一氏による超特異楕円曲線の個数に関する結果の 2 次元版とみることでもでき、四元数体の類数などの数論とも関連が深い。幾何学と数論の交錯するところであり、様々な数学的対象の合流点でもある。またその後、その理論を発展する形で正標数に特有の幾何学、たとえば形式的ブラウアー群の高さという性質から誘導されるモジュライ空間の幾何学、とくにモジュライ空間の代数的サイクルやモジュライの具体的表示に関する研究が続く。これについてはファン・デア・ヘア氏、オールト氏らとの共著など論文がある。

そのほか代数幾何以外の他分野とも関連する氏の論文として、線形コードに関する論文、共形場理論の論文などがあり、桂氏の数学の多彩さがみてとれる。

桂氏は一貫して正標数の代数幾何において正標数特有の研究を様々な角度から行っており、彼の構成した興味深い多くの例は現在では古典的常識となっている。桂氏の仕事は正標数の代数幾何の発展に大きな寄与を与え、その後の後継者にも大きな影響をあたえている。桂氏のこれらの業績は代数学賞に値するものである。