

数学の発展と展望*

明治大学総合数理学部
砂田 利一

昨年の2016年は、リーマン没後150周年の年であり、世界各地で様々な催しが開かれた。その1つがストラスブール大学で開催された「Geometry in History」という研究集会である。筆者はこの集会で、リーマン和と準結晶の関係を主題にして講演を行った ([8])。しかし、本稿で述べたいのはこの講演の内容ではない。正直言うとそれを紹介したいのだが、編集委員会から筆者に課された題（数学の発展と展望）とはまったく異なるので、躊躇しつつも、会議録に掲載予定の別の論文「From Euclid to Riemann and thereafter」に関連した内容について語ることにする。この論文は、幾何学の歴史を「宇宙をいかに記述するか」という観点からの解説したものである。その執筆中、幾何学のみならず、数学という学問に携わった人々について考えることが多々あった。たとえば、数学者を取り巻く環境と数学研究の関係についてである。すなわち、彼らの生きた時代と場所がどのように数学と個々の数学者に影響したのかということである。したがって、これから述べることは、通常の意味での「発展と展望」とはかけ離れていることをお断りしておく。また、数学全体の発展を述べるにはあまりにページ数が少ないこともあって、内容が薄く、散漫になることをお許し願いたい。

1 国民性、民族性と数学

弁解はこのぐらいいにして、まずは、主題に少し関係がある芥川龍之介の文章を引用しよう。

僕等は時代を超越することは出来ない。のみならず階級を超越することも出来ない——のみならず僕等を拘束するものは必ずしも階級ばかりではない。地理的にも大は日本から小は一市一村に至る僕らの出生地も拘束している。その他、遺伝や境遇も考えれば、僕等は僕等の複雑であることに驚嘆せずにはいられないであろう。（しかも僕等を造っているものはいづれも僕の意識の中に登って来るとは限らないのである）。(『文芸的な、余りに文芸的な』, 1927年)

本稿では、この文中の「僕」を「数学者」に置き換えてみて、時代、場所、境遇がどのように数学者に影響を与えてきたかを考えたいのである。

これに関連して、もう1つ例として挙げておきたいのは、戦時中文化大臣の職にあった橋田邦彦(1882–1945)の、「科学の研究には『国民性が現れるし、現れるべき』という考え方である。これを数学に限定していうと、日本人にしかできない日本独特の数学があるべきということになる。

*この文章は2016年9月19日に関西大学で行った日本数学会70周年記念講演に基づいている。

橋田は、戦前の実験生理学の権威であり、東京帝国大学教授の地位にあったが、1940年から1943年まで近衛内閣および東条内閣の文部大臣を務めていた。このこともあって、敗戦直後に戦争犯罪人とされ、それを潔しとせず、1945年9月14日服毒自殺した。

彼の科学に関する考え方を掻い摘んで表現すれば、「それぞれの学者のやっている研究には、必ずその学者の人格の影がみられる。自然科学の国際性ということがいわれるが、実は欧米各国の生理学には国々によってそれぞれの特徴があり、その国の国民性が科学のなかにしっかりと織り込まれているのである。したがって、まずわれわれは「日本の生理学」を建設することに努力しなければならないのではないか」([1])ということである。また、「日本の科学者は、『日本の科学』を作り上げるのが務めである」とも言っている。

橋田の主張は、(好意的言い方をすれば)当時の国粹的雰囲気の影響されたものであり、時代の影響下にあったと言ってよい。現在、このような考えを持つ現場の科学者はほとんどいないし、私個人としても、国粹的な橋田の考え方にはまったく賛成できない。しかし、異なる文脈の下で、人種・民族の違いが数学・科学の研究態度や内容に影響するのではないかという人たちがいる。国は違うが、同じような考えは、ナチス・ドイツにもあった。アーリア人の優越を声高に叫び、数学者のタイヒミュラー、ビーベルバッハのように、ユダヤ系学者の迫害に加担した者たちがそうである。

多変数関数論の分野で大きな貢献をした岡潔は、日本独特の数学研究があるということを行っている。岡潔の持論の背景には、一言で言えば「数学は論理で作られるのではなく、感性が重要な役割を果たす」ということ、そして日本人は「感性」、「情緒」の面で優れているという主張がある。確かに数学は論理のみで作られていくわけではない。情緒的な面ともいえる数学的センス、高度な美意識が必要なことは確かである。とは言え、これは日本人研究者に限ったことではなく、すべての研究者に言えることである。

中には「和算」という日本独特な数学があったのではないかという人もいるだろう。しかし、これは江戸時代の、世界から孤立した中での、すなわち時代と場所による影響下で生まれた数学であって、決して日本人しかできない数学ではなかった。和算の大家であった関孝和(1642年頃-1708)と建部賢弘(1664-1739)が高く評価されるのは、和算を超えた世界に通用するような普遍的業績を挙げたことに大きな理由がある(しかし、彼らは例外であって、和算がほとんどパズルに墮していったのは、外部との接触がなかったことに主原因がある)。

最近も、「人種」、「民族」と数学の性格の間には関係があるとの主張を耳にすることがある。その1つは、「20世紀の数学の抽象的・非構成的議論には、ユダヤ系数学者のヨーロッパとは異なる思想が大いに反映されている」という説である。その例として挙げられているのは、集合論を創設したゲオルク・カントル(1845-1918)、位相空間論で有名なハウスドルフ、抽象代数の大御所であったエミー・ネーター、関数解析のフォン・ノイマン、代数幾何学のグロタンディックらである。

確かに、抽象的数学で大きな貢献をした数学者にはユダヤ系数学者が多いが、それは人種・民族の特性によるものというより、やはり時代と場所、そしてユダヤ人が置かれ

ていた当時の社会的環境によるところが大きい。

今、カントルはユダヤ系と言ったが、正確にはユダヤ人の血が混じっているということであり、むしろ彼は宗教的には敬虔なカトリック教徒であった。彼の時代を画す業績は、一対一対応を基礎として、「実無限」を許容する集合論を創始したことである（実無限については、次節で述べる）。20世紀の抽象的・非構成的数学は、まさにカントルの集合論を源にしていると言ってよい。しかし、その革命的な内容もあって、当時の数学者の冷たい反応があった。彼は自身の理論をカトリック神学に結びつけて自らの研究を擁護しようとしたのである（エルミートへの書簡にこのことが書かれている）。

2 無限の概念

ここで、カントルの理論の背景にある、無限概念についての歴史を振り返ろう。集合論を「血と肉」としている我々数学者にとって、今更「無限」についての特別な感興が呼び起こされることはほとんどない。すなわち、それほど現代数学は集合概念に依存し、初めから概念が用意されていたかの如く、我々は無限というものに慣れ親しんでいるのである。しかし、無限概念に対する数学者と哲学者の態度には、時代に応じた違いが見られる。一言で言えば、古代ギリシャの伝統を引き継いだヨーロッパの文化的環境が、（時代は移るものの）無限に関する考察を深化させ、最終的にはカントルの理論に至ったのである。

無限を最初に扱ったのは、古代ギリシャのアナクシマン드로ス（前610頃-前546頃）である。彼は「アペイロン」（限りがない）という概念を導入し、それを万物の根源（アルケー）とした。その後アナクサゴラス（前510頃-前428頃）により「無限大、無限小」について語られたが、19世紀後半まで歴史の中で大きな影響を与えたのはアリストテレス（前384-前355）である。彼は、無限には「実無限」と「可能無限」の2種類があって、可能無限は認められるが、実無限は存在しないと考えた。カントルの集合論は、まさにアリストテレスに対するアンチテーゼなのである。

念のため、「実無限」と「可能無限」の意味を与えておく。

可能無限：無限を把握出来るのは、限りがないということを確認する操作が存在していることだけで、無限全体というのは認識出来ないとする立場

実無限：無限の対象の全体性を把握して、無限が実際に存在しているとする立場

例えば、自然数は、1, 2, 3, 4, … というように、順に数え上げていくことで認識される対象であるというのが可能無限的考え方であって、他方、自然数全体の集まりを一挙に認識し、それを例えば記号 \mathbb{N} で表すというのが実無限的考え方である。

「可能無限」は人間の認識能力の限界の中で確かめられる無限であり、実無限は有限の存在である人間の及ぶところではない超越的な無限と言ってもよい。このような理由から、哲学者の多くは、集合論上で構成された現代の数学理論を認識論的に問題がある

と主張する。例えばヴィトゲンシュタイン（1889–1951）は、「集合論はまったくのナンセンスであり、笑うべきもの、そして根本的に誤り」であると言う。一方、ヒルベルト（1862–1943）は、メタ数学（数学理論を語るための数学）は有限的でなければならないが、矛盾が生じない限り、論理上の実無限は認めるべきであるという。

アリストテレスが「可能無限」に拘った理由の1つに、当時の数学の無限の扱い方にあると考えられる。¹ 例えば、ユークリッド（紀元前300年頃）により編纂された『原論』の中で述べられている「素数は無限個存在する」という定理は、「素数の個数は、いかなる定められた素数の個数より大きい」と表現されている。また、プラトン（前428頃–前348頃）の弟子であったユードクソス（前408頃–前355頃）により正確に定式化された「取り尽くしの方法」でも、同じような表現が見られる（この方法は、「与えられた量の半分をさらに半分して、これを続ければ、予め与えた量より小さくなる」という言明と背理法を組み合わせることで、図形の面積や体積を求めるのに使われた）。高校で習う数列と極限の定義にも、日常的言語で説明した方が理解を容易にするせいか、「可能無限」的表現が使われている。²

カントル以前に、実無限というものをある程度把握していた人々がいることに注意しておこう。アルキメデス（前287–前212頃）の「機械的定理の方法」には、2つの無限個の対象間の一対一の考えが垣間見えるし、中世後期の学者であるブラドワーディン（1290頃–1349頃）とオレーム（1320–1382）は、やはり一対一の考えを用いて「無限のものは、その部分と等しいことがある」と言明している（現代的用語を使えば、「無限集合 X に対しては、その真部分集合で、 X と一対一となるものがある」ということである）。他方、ガリレオ・ガリレイ（1564–1642）は、この事実をパラドックスとしている。

注意 イギリス出身の数学者・哲学者であるホワイトヘッド（1861–1947）が、「7匹の魚の集団と1週間の7日の間に類似性があることに気付いた最初の間は、思考の歴史の上で顕著な前進をもたらしたのである」と言っているように、一対一の「原理」は、既に古代人が「数」というものを把握するのに使われていた。すなわち、一対一の原理を用いる集合概念は、古代人の思考の延長線上にあるのである。

3 神学と宇宙観

その是非は別として、カントルの例にも見られるように、宗教（神学）と数学の関係は微妙な問題がある。特にヨーロッパでは、宇宙の構造（特に宇宙のサイズが有限か無限かを問う問題）を探求する動機に、神学が果たした直接・間接に果たした役割は無視できない。さらに、神（God）を絶対者と置き換えて議論する形而上学的考え方も、神学

¹アリストテレスは、物理的宇宙における実無限は拒絶したものの、数学における実無限は認めていたという説がある。

²念のため、数列と収束の現代的定義を述べておく。「数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は自然数の集合 \mathbb{N} から実数の集合 \mathbb{R} への写像であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるとは、「任意の正数 ϵ に対して、ある自然数 N が存在して、任意の自然数 n について $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \epsilon$ が成り立つことである」。ここで注目すべきは、実無限と可能無限の双方を取り入れた形で収束を定義していることである。

の間接的影響下にあると考えられる。

これから述べることは、ヨーロッパを中心とする数学およびそれに関連する事柄についてであるが、インドや東アジアでは数学は独自の形で発展していったことに注意しておきたい。中国では儒教という孔子（前 551–前 479）を始祖とする思考・信仰の体系が大きな影響を与え、家族やコミュニティの価値、社会的・政治的問題に重点を置いたということもあり、儒教が直接科学・数学の発展に係ることはなかった。むしろ実用的数学に向かう傾向が見られる（その代わりに、負数の導入や連立方程式の掃き出し法など、世界に先駆ける発見・発明がなされたことは特筆すべきことである）。他方、インドの宗教・哲学は独特の性格を保持しており、その中から 10 進法のような極めて有用な概念が生まれた（ただし、インドの数学と天文学は古代ギリシャあるいはヘレニズム期の影響を受けていた可能性もある）。

再び古代ギリシャに遡る。有限な球体モデルを提唱したプラトンに引き続き、彼の弟子であったユードクソスはこのモデルを数学的に整理・発展させ、さらにアリストテレスにより形而上学的観点から球体モデルの妥当性が論議された（彼によれば、天球は地球を中心にして 7 つの同心球体からなり、Prime Mover という一種の絶対者により回転している）。その後、アリストテレスのモデルは、トレミー（100 頃–170 頃）により天動説として精密化され、1200 年を超える長い期間、キリスト教神学の影響下にあるヨーロッパばかりでなく、イスラム世界にも受け入れられることとなったのである。

球体モデルを受け入れるなら、その「外側」には何があるのかを問うのは自然である。ダンテ（1265–1321）は、未完の著作『饗宴』の中で、アリストテレスの説を敷衍して「宇宙はすべてを含み、その外側には何もない。外側は空間ではなく、Prime Mind のみで形成されている」と言っている。『神曲』のなかでは、ダンテはさらに興味深い宇宙像を提示している。地獄が球体宇宙の中心になることを避けるために、球体宇宙の鏡像を天上界と考え、その境界と球体宇宙の境界を張り合わせた大宇宙を考えたのである。³

ヨーロッパで大きな文化的・精神的変化が起きた 15 世紀になると、クサのニコラス（1401–1464）は、球体モデルに異議を唱え、神と人間の関係から、宇宙は無限でもあり有限でもあるとした。地動説で有名なコペルニクス（1473–1543）は、宇宙全体についてはアリストテレスの説を引き継ぎ、宇宙は球体の形をしているとしたが、ジョルダノー・ブルーノ（1548–1600）は、完全なる神の力は無限であるから、神が創造した宇宙も無限であると考えていた。ガリレオ（1564–1642）も宇宙は無限との考えも持ってはいたものの、最終的には「有限か無限かは人知を超えた問題であり、聖書と天啓のみが答を与えるだろう」と言明し、どっちつかずの態度を取った（この背景には、異端審問の苦しい経験があると考えられる）。ガリレオと同時代のケプラー（1571–1630）はスコラ哲学の影響の下、宇宙は有限と考え、デカルト（1596–1650）は最初は宇宙は有限と考えていたが、ケンブリッジのヘンリー・モアと議論を戦わせている間に、宇宙は無限と考えるようになった ([2])。高名な経済学者ケインズが「理性の時代の人ではなく、最後の中世人」と形容したニュートン（1642–1726）によれば、宇宙空間は、神の限りなく一樣な感覚器官

³現代的観点から見ると、ダンテの大宇宙は 3 次元球面 S^3 である ([6])。

であり、これを否定したライプニッツ（1646–1716）は「神は無数の選択があるなかで、1つの宇宙を選択したとき、最善のものを選んだ（「目的論」）」と言っている。

ざっと宇宙の構造に関する考えの変遷を述べてきたが、すべて思弁的あるいは神学的色彩が濃厚であることに気付く。その後も、「最小作用の原理」で有名なモーペルチュイ（1698–1759）は、「自然と宇宙の秩序は理性を持つ神の存在を支持している」と主張し、かのオイラー（1707–1783）も「変分法」の理論を確立する中で、「宇宙という建造物は完璧であり、もっとも賢明なる創造者の仕事であるから、最小あるいは最大原理が登場しないような事柄は宇宙のどこにも存在しない」と言っているように、神学的観点から抜け出していない。変わり目は、19世紀の初めの頃である。フランスの革命期に活躍したラプラス（1749–1827）が彼の著作「天体力学」をナポレオンに献呈したとき、両者の間で次のような会話がなされたという。

ナポレオン：貴殿の本では、宇宙の事柄を扱っているのに、神についてまったく言及していないようだが。

ラプラス：そのような仮定は必要ないからです。

実際、19世紀には、ガウス（1777–1855）の曲面論を抽象的な曲がった空間（多様体）の理論に一般化したリーマン（1826–1866）の登場以来、宇宙の構造は精緻な数学の言葉で語られるようになり、神の存在と宇宙を結び付けることは（ほとんど）なくなった。⁴

さて、宇宙のサイズは有限か無限かというそもそもの問題はようになったのだろうか？ 実を言うとこれは未だ決着のついていない問題である。欧州宇宙機関宇宙天文台による最近の観測によれば、宇宙の大規模構造に注意を払うと、曲率がほぼゼロであるという意味で平坦に見える。しかし、だからと言って宇宙が無限に広がっていることにはならない。実際、平坦ではあるが閉じた宇宙モデルが存在するからである。無限に関するアリストテレスの問いは、現在でも意味を有していると言える。

4 展望

数学の将来を語る場合、人工知能（AI）と数学の関係は無視できない話題である。既にAIはプロの碁と将棋の棋士を打ち負かし、さらに人間のみが関われると考えられていた分野へAIが進出する勢いは加速しつつある。数学も例外ではない。とは言え、人工知能がどこまで発展し、数学研究に影響するのは、実際には予測不可能と言うのが正直な思いである。無理をすると、「何でもあり」、「言いたい放題」の予測ということになりかねない。確かなことは、4色問題やケプラー予想の解決に援用されたように、数学研究

⁴宇宙の神秘に魅せられると、アインシュタインの言葉である「人間の運命や行為を司る神は信じないが、すべての存在の調和に顕われるスピノザの神（宇宙的宗教感情）は信じる」という言明はなるほどと思うようになる。しかし、これはあくまでも個人的感情であって、知性ある何ものかによって生命や宇宙が設計されたとする説であるインテリジェント・デザインやサムシング・グレート（インテリジェント・デザインの日本版）のような、似非科学的学問の押しつけとは異なる。

におけるコンピュータの使用はこれからも増えていくだろうし、中でもシミュレーションでは増々大きな力を発揮するだろう。

しかし、例えば100年後の未来はどうなっているか。特にAIの学習機能が進歩し、機械に知能とよべるものが備わったとき、数学者はそれとどのように付き合っていくべきなのか。SFの映画、例えば「2001年宇宙の旅」、「アイ、ロボット」、「A.I.」のような映画に登場する人工知能は「問いかげ」を自由に行うが、それが近未来に起きうることなのか、あるいは永遠に起きないのか。

現時点では、「問と答」という人間と機械とのやりとりを考えたとき、問いかげは人間の得意技であり、答えるのは機械のほうが断然勝っている。すなわち、問いかげのためには、問題意識を持つ必要があり、問題意識は経験や外的影響、さらにはセンス、場合によっては美意識に深く関係している。AIは美意識を持つことができるのだろうか（「できる」と言っておいた方が無難なのかもしれないが、無責任なので止めておく）。

AIに関連する問題がある。我々は何故ここにいるのか、何故宇宙を知りその調和を語ることができるのか。宇宙は何故「知性」あるいはその根源にある「意識」というものを生み出したのか。「自由意志」（もしそのようなものがあるとすればだが）は、宇宙の物理法則とはどのような関係があるのか。AIは自由意志を持ちうるのか（[5]）。

自由意志の問題も、宇宙の構造問題と同じく神学に深く関係し、その歴史は古い。アウグスティヌス（354–430）は、人間の罪を例として、自由意志と神の予知を両立させようと試み、『哲学の慰め』を著したボエティウス（480頃–524）は、全知全能の神の存在と人間の自由意志の存在を適合させるため、神は万物の知識を無時間かつ即時に手に入れるのであって、時間の流れの中で生きる人間が自由意志があると意識するのと矛盾はしないと主張する。⁵しかし現在でも、自由意志に関係する決定論、非決定論の正否には決着がつかない。

ドイツの生理学者エミール・デュボア・レーモン（1918–1896）が言うように、例え宇宙のすべての法則を知りえたとしても、この疑問に答えられる者はいないのかもしれない（[3]）。⁶宇宙は有限か無限かについても答えられないし、AIがどこまで発展するのか、自由意志が実際にあるのかどうかにも答えられない。「展望」をこのような悲観的言葉で締めくくるのは心苦しいが、筆者の想像力の欠如ということでご寛恕願いたい。

参考文献

- [1] 吉仲正和、『文部大臣自決事件—橋田邦彦』、「科学朝日」編、「スキャンダルの科学史」、朝日新聞社、1997年

⁵現代数学を使って構成するモデルは、それがランダム現象のモデルであっても、非時間的かつ決定論的様相を持つ。たとえばブラウン運動のモデルがそうである。

⁶彼の「イグノラビムス」（我々は知らない、知ることはないだろう）という考え方の根底にあるのは、当時完全かつ終局的理論として信じられていたニュートン力学と素朴な原子論に依存している。彼の論述にはこのような限界はあるものの、例え20世紀に創始された量子力学の知識を以ってしても、彼の疑問に完全に答えることはできない。

- [2] アレクサンドル・コイレ, 『閉じた世界から無限宇宙へ』, 横山 雅彦 訳), みすず書房, 1973 年
- [3] デュボア・レーモン, 『自然認識の限界について, 宇宙の七つの謎』 (坂田徳男 訳, 岩波文庫), 1928 年
- [4] 砂田利一, 『現代幾何学への道 –ユークリッドが蒔いた種–』, 岩波書店, 2010 年
- [5] ロジャー ペンローズ, 『皇帝の新しい心—コンピュータ・心・物理法則』, (林一 訳), みすず書房, 1994 年
- [6] M. Peterson, *Dante and the 3-sphere*, American Journal of Physics, 47 (1979), 1031
- [7] T. Sunada, *From Euclid to Riemann and thereafter*, preprint 2017
- [8] T. Sunada, *Generalized Riemann sums*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 2017