

塚本真輝氏の平成28年度文部科学大臣表彰 若手科学者賞受賞に寄せて

サイモンズ幾何物理センター
(ニューヨーク州立大学)
深谷 賢治

塚本真輝さんが、文部科学大臣表彰若手科学賞を受賞される。お祝いを込めて、塚本さんのことを書かせていただきたい。

いきなり私事で恐縮であるが、私が塚本さんと初めて会ったのは、彼が学部3年生の時である。その年から京大の数学科は演義（演習ではなく）を復活させた。演習は習ったことを確認したり、理解を深めるのが目的であるが、演義はもっと難しい問題を出して、新しいことを考える力を鍛えるのが目的だった。その1年目の幾何の部分を担当した筆者は、よしとばかり難問（ランダムウォークで群上のラプラス方程式の無限遠境界値問題を解くとか、次数の高い実代数方程式の0点集合のベッチ数をモース理論で評価するとか）を準備した。（3年生の演義と言うより修論の問題のレベルに近い。）その年は優秀な学生が揃っていて、片っ端から解いてくれた。塚本さんはその中心人物で、毎週のように現れては楽しそうに様々な問題にアタックしてくれる。この年の演義ほど担当していて面白かった授業はその後ない。

4年生でセミナーを始めて確かフリード・ウーレンバックのゲージ理論の教科書を読んでもらった。これはよくかけた教科書で、塚本さんのセミナーは準備も行き届いて、セミナーというより、そのまま学生にする講義にしても大変上手な講義（多分筆者がやるよりうまい）と感じられた。

あまり分かりやすすぎると退屈だろうと思い、薦めたのがグロモフの平均次元についての論文である¹。この話は昔ジョンホプキンス大学日米数学研究所の研究会でグロモフの講演を聞いて面白いと思って以来、なんとか理解したいと思っていたが、いかにもグロモフらしくワイルドな論文で、なかなか歯が立たなかった。やっているのは、非コンパクト多様体の指数定理の非線形版をなんとか作ろうという試みに筆者には思われた。アティヤーがゲージ理論をする直前に研究していたのは、例えばガンマ指数定理、無限群で不変な楕円型作用素の指数定理である。無限群で不変な楕円型作用素の指数は、普通に考えると無限大になる。しかし、それを無限群の位数（普通には無

¹M. Gromov, Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I, Math. Phys. Anal. Geom. 2 (1999) 323-415.

限大)で割ると、有限な数になり、それが特性類の基本領域での積分で計算できる、という定理である。だから、そのあとに出てきたゲージ理論への指数定理の応用(モジュライ空間の次元を指数定理で数える)と合わせれば、群で不変な非線形方程式の解の次元を群の位数=無限大で割ったものが研究できないかと思うのだが、アティヤもその多くの優秀な弟子も誰もやっていない。よほど難しいのだろうがグロモフがそれを可能にしたのか、と思えた。実はそういつてしまうとかなり不正確で、グロモフは確かに平均次元という群の作用する無限次元空間の次元を定義しているのだが、それは、フォンノイマン次元(ガンマ指数定理に出てくるのはそれだろう)とは違う(とグロモフは日米数学研究所で言っていた)。実際論文を見ていると、エントロピーのようなものが出てきている。ガンマ指数定理に出てくるのは L^2 空間なのだが、平均次元では L^∞ 空間を使う。 L^2 空間でないと、直交射影を使って指数を定義するというアイデアが使えない。どうやるのかと思ったが、なかなかわからない。実はこの論文はIとなっていて、証明の細部はIIにあると書いてあるものの、多分IIはかかれることはないと思われる。

塚本さんは興味を持ったようで、一連のセミナーでグロモフの論文の解説から初めて、次々と結果を出してきた。フリード・ウーレンベックなら明快な解説もできるだろうがこの論文は無理だろう、と思っていたのだが、塚本さんの説明は実に明快であった。その後の塚本さんのセミナーを聞いているうちに、当時の平均次元の研究の状況が少しは筆者にもわかってきた。それをここで受け売りしよう。

グロモフの論文が出た後の後平均次元の研究では、リンデンシュトラウスらの力学系の埋め込み問題への応用が出たが、その後あまり進んでいない。研究しているのも数名程度であるらしい。普通グロモフの論文は、フランスあたりで色々な人が勉強を始めて次第に理論らしくなってきた、しばらくすると世界じゅうで研究されるようになる。グロモフ-ハウスドルフ距離も擬正則曲線も双曲群もそうやって生まれた分野だ。平均次元は当時あまり研究されていなかったらしい。だったら、やってみたら、新しい分野のリーダーになれるよ、と自分でやるわけではないから気楽に薦めてみたのだが、紆余曲折を経て、そうなりつつあるように思える。

非線形方程式のモジュライを指数定理で調べるというと、ゲージ理論(の数学)か擬正則曲線である。塚本さんが研究しているのも、その2つがでてくる。

ゲージ理論の数学は、1995年ぐらいからそれまでの解析と幾何の融合分野から様変わりしつつあって、解析はその方面では流行らなくなりつつある。純位相幾何学的あるいは代数や組み合わせ的考察で結果がでるようになった(サイバーク-ウィッテン理論とオスバス-サボーのヘーガード-フレアー理論のせいで)のが理由であろう。塚本さんはゲージ理論のモジュライの平均次元、特に $S^3 \times R$ のエネルギー無限大の自己共

役接続，を研究し始めた．これはハードな解析の問題で，流行と正反対である．塚本さんは松尾さん²とも共同研究しながら，結局この場合の平均次元に関わる主要問題をだいたい解いてしまった．これは S^3 上の接続の空間上の自己共役方程式が決める力学系に対する大変斬新で深い理論であった．

擬正則曲線の方であるが，これはグロモフの論文でも研究されている．ただし，ここでもシンプレクティック幾何への応用が主題ではない．それで擬正則曲線である理由はあまりなく，正則曲線の研究である．つまりターゲットは積分可能な複素構造を持つ複素多様体である．無限エネルギーの正則曲線は昔から重要な分野で，ネヴァリンナ理論はそれにあたる．ただし，塚本さんの研究はネヴァリンナ理論のメインストリームの問題意識や方法論とはずれるらしい．平均次元を使うだけでなく，研究の中に，多分，ゲージ理論や擬正則曲線のモジュライ空間の研究の発想が入ってきていて，それは従来のネヴァリンナ理論とは異質である．ただし，塚本さんの研究では，従来のネヴァリンナ理論の深い部分も有効に使われる．無限エネルギーの正則曲線のモジュライの平均次元についての深い結果が多く得られている．

これらの塚本さんの結果で，平均次元は「グロモフの論文があるだけで何か謎めいた概念」から，「様々な例や定理が並ぶ発展しつつある数学の分野」にさまがわりしてきたように思われる．

通常新しい分野が完全に確立するには，従来の分野の重要な未解決問題をそれが解決することが，一つのエポックメイキングな出来事となる．ゲージ理論や擬正則曲線の理論の無限次元版だとすると，それは，例えば，位相幾何やシンプレクティック幾何への画期的な応用となるはずだが，それが正しい見方かはわからない．筆者が自分の研究で関わってきたのはそっちで，だから，始めはその辺に应用があるかと思っていたのだが，違う可能性もある．（発展途上の分野の話だから，どうなるかわからない．）

塚本氏の意見もそうと思われるが，平均次元の研究と親和性の高いのは，ゲージ理論や擬正則曲線というより，力学系の研究であろう．力学系は非線形微分方程式だが，それはエネルギー無限大の解を問題にする．ゲージ理論を非コンパクト多様体上で考える場合でも，多く考えるのは，無限遠で一定の接続に漸近する解で，すなわち，（無限に続く時間の中に）非自明な現象が起こるのはある有界な時間だけで，それ以後は何も起こらず減衰する解を考える．力学系で面白いのはそういう解ではなくて，無限に続く時間の中に非自明な現象が無限回起こる解である．平均次元が非自明になるのは，そういう解がふくまれている場合で，従って，平均次元研究では力学系研究の間

²松尾 信一郎氏(名古屋大学多元数理)

題意識を引き継ぐべきであろう。（塚本さんの研究は、力学系研究者に対しての方が「ウケがいい」らしい。）

ここで言及したいのが、先ほど触れた、リンデンシュトラウスの力学系の埋め込み問題への応用である。力学系の重要な不変量はエントロピーで、これを力学系の不変量として確立したことは、コルモゴロフの力学系研究への重要な寄与の一つと思われる。エントロピーの次の不変量は何か考えようとして出てきたと思われるのが、力学系の埋め込み問題である。これは、一つの力学系 X (Z が作用する測度空間と見ておく) が別の力学系 Y に埋め込まれるのはいつか、ということの問題にする。「 X のエントロピーが Y のエントロピーより大きくないこと」、は必要条件である。リンデンシュトラウスは、力学系 X が力学系 Y に埋め込まれれば、 X の平均次元が Y の平均次元より大きくないこと、を用いて、エントロピーの条件は十分でないことを示した。これは、平均次元の力学系研究での重要性を示すのにふさわしい結果であろう。

その後しばらくブランクがあったと思われるが、最近、塚本氏はリンデンシュトラウスとの共著論文で、平均次元と力学系の埋め込み問題についての重要な結果を出し始めている。塚本氏の登場で、平均次元が力学系研究の中でしかるべき発展をし始めているように見える。

塚本氏は多くの重要な研究論文を書いているが、その研究は、「関わる分野のメインストリームや流行にのっとり、多くの人が興味を持っている問題や方向性に寄与する」、というのとは、正反対のものである。そのせいか、論文の出版や、研究者集団から認知といったことで、様々な困難を経験している。しかし、塚本氏は、そのような中で、10年以上にもわたって、粘り強く研究を続け、多くの優れた成果を上げており、その研究はだんだんと「無視不能」になりつつある。近い将来、経験した困難を、「オリジナリティーの証拠」として誇れる日が来ると信じている。