第 20 回藤岡おもしろ数学教室

数学活用ーもっと自由に考える 2

横浜国立大学大学院環境情報研究院・教授
根 上 生 也

昨年に引き続き，今年度も「藤岡おもしろ数学教室」(藤岡市教育委員会主催，日本数学会，関孝和顕彰会後援）で出張講義をさせていただきました．前回，別れ際に藤岡市のスタッフの方が「これまで来ていただいた先生の中で一番おもしろかった」とつぶやいていたのを耳にしていたので，こうなることは予想していたことです．今年度は日本数学会理事長の小谷元子先生と理事の望月拓郎先生にご同行いただき，私がどんな講演をするのかをしっかりと見ていただきました.

さて，私はいろいろなところで講演をしているので，講演をすること自体は慣れっこです．しかし，同じところで同じ講演を繰り返すわけにもいかないので，今回は何を話そうかと思案しました．その結果,「四色問題」をテーマに新作を作ることにしました.

数学会の会員のみなさんなら，四色問題が何かはご存知でしょう．1976 年に Appel と Haken によって「どんな平面地図でも 4 色あれば色分けできる」という定理が証明され，四色問題は解決されました. しかし, 彼らの証明にはコンピュータが長時間使われていて，当時の数学者には受け入れがたいものでした．そういう話をしたところで，はたして中学生はいい子に聞いてくれるでしょうか．そもそも，それでは「もっと自由に考える」，しかも「2」と謳っていることにそぐわない．では，どうするか….

平成 27 年 10 月 23 日（金）の午後，藤岡市立北中学校体育館には，589 名の中学生が集まりました．今回はグループ活動をするわけではないのですが，数名ずつ机を囲んで座っています．そして，ステージの上に立った私は，前回同様に，大きな声で「こんにちは〜！」と叫びます．それに答えて中学生も大きな声で「こんにちは〜！」と返します．そして，自己紹介をし，私が数学監修をした映画「容疑 X の献身」の話をしました．この手順はほぼお約束どおりなのですが，今回は堤真一さんが演じる石神が自宅で研究していることになっている「四色問題」に焦点を当てる宣言をしました.

まず，四色問題は 1852 年にフランス・ガスリーという人が数学を専攻する弟に「どんな平面地図でも 4 色あれば色分けできるか」と尋ねたことに始まること，Wikipedia にあるアメリカ合衆国の 50 州の地図を例に，境界線を挟んで接している国は異なる色で色分けすること，点で接する国は同じ色でもよいことなどを説明しました．そして，あらかじ

め机の上に配布してあったプリントにチャレンジしてもらいます．

そのプリントは，群馬県の市町村の白地図，日本の都道府県の白地図，「ガードナーの反例」として知られるレンガを積み重ねたような白地図に加え，水平・垂直の直線からなる格子の描かれた１枚です．中学生は赤，青，緑，黄の色鉛筆を持参しています．

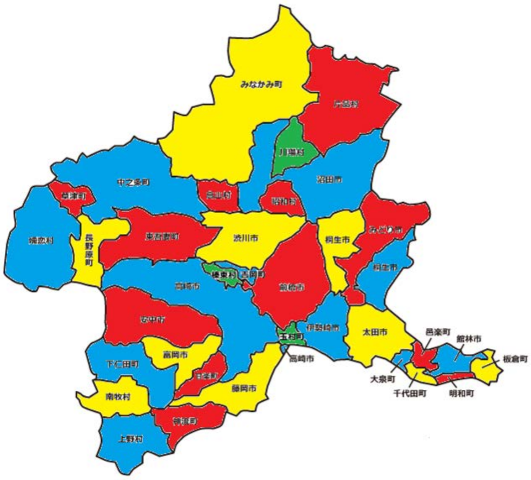

図１．四色問題 in 群馬県

「四色問題の意味がわかったところで，さっそく群馬県の地図にチャレンジしてみよう」そう声を発するなり，中学生たちは待っていたと言わんばかりに，一斉に群馬県の白地図の色分けにチャレンジしだしました．

いわゆる数学のような問題ではないし，この時点ではパズルでしかないので，とっつきやすかったのだと思います．しかし，中学生がこんなに素直に，そして熱心に問題に向き合ってくれたのは予想外でした．とはいえ，要領よく素早く色分けできる子もいれば，試行錯誤を繰り返している子もいます．そして，一番に色分けを完成させた女の子には私の独断で「藤岡市教育委員会賞」を認定．教育長さんもこれに応じてくれて，講演の後の挨拶のときに彼女に急きょ取り寄せた賞品を授与してくれました．ちなみに，群馬県の市町村は図１のように，４色目をあまり使わないで，４色で色分けすることができます．

日本地図とガードナーの反例は時間調整のために用意しておいたものなので，早く群馬県の色分けが完成した人はそれにもチャレンジしてもらいました．そして，大半の生徒が群馬県の色分けを完成できた頃合いを見計らって，「次の話に移っていい？」と聞いてはみたものの，みんな，夢中にチャレンジを続けていてやめようとしません．きっと途中で投げ出す生徒が多いだろうと予想していた私には衝撃的でした．今回の講演は新作なので，聴衆の反応を読み切れてはいなかったけれど，ここまで予想が裏切られるとは…．その一方で，学校で習う数学とは違うけれど，どの子も本当は数学的に考えることが好きなんだ

と確信させてもらえて，うれしく思いました．

そこで，無理に手を止めさせずに話を聞いてもらえればいいやと腹をくくった私は，領域を着色するという四色問題が点と線からなるグラフの彩色問題に置き換わること（つまり，線で結ばれた点どうしは異なる色にする），Appel と Haken が平面的グラフの問題として四色問題を解決したこと，地球がトーラスのようになっていたら７色ないと色分けできない地図があることなどを話していきました．そして，最後に青い背景に「もっと自由に考える！」と大きな白抜き文字で書かれたスライドを背負って話をまとめます．

「ここまでの話は本に書いてあるし，ネットで調べればわかることだよ．でも，そういう知識の世界に閉じこもっていてはいけない．もっと自由に考えるんだ！」

この訴えが中学生の心にどれだけ伝わったかはかなり怪しいけれど，この言葉をきっかけに生徒たちは私の話を聞くモードに変わってくれました．

四色問題が解決されたのは私が大学生のときでした．私自身も四色問題にチャレンジしていたこともあり，四色問題の解決は私にとって衝撃的な出来事でした．その後，私は四色問題の研究を発展させて，今日「位相幾何学的グラフ理論」と呼ばれる研究分野を切り拓いていきました．その後，同じような研究をしている海外の人たちと出会い，私の世界が大きく広がります．そういう世界中の人たちと関わるようになり，あるとき弟子の中本敦浩先生（現在，横浜国立大学大学院准教授）から，次の問題を教えてもらいました．

問題　５頂点の完全グラフの頂点を平面の整数格子点上に配置し，どの辺の途中にも格子点がないようにできるか？

問題にある**完全グラフ**とは，図２にあるようなすべての点（**頂点**）の組合せが線（**辺**）で結ばれた図形（**グラフ**）のことです．

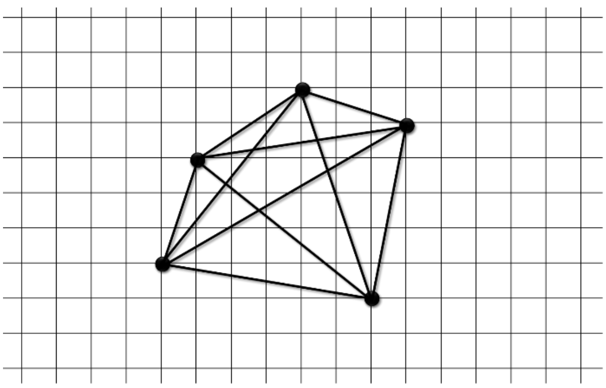

図２．格子点上に配置した５頂点の完全グラフ

通常のグラフ理論で，どの頂点とどの頂点が辺で結ばれているのか（頂点の隣接関係）だけが重要であり，どのようにグラフを描くかは問題にしません．しかし，この問題では平面上の頂点の配置を問題にしています．図２では，ほとんどの辺の途中には格子点がありませんが，１本だけその中点が格子点になっている辺（傾き-3）があります．頂点の位置を動かして，そのような辺がないようにできるかというのが問題です．

実は，この問題は「鳩の巣原理」の応用問題として有名な問題でした．まず，どの頂点も整数格子点上にあるので，x 座標と y 座標のいずれも整数になっています．そこで，その座標の偶奇性を考えて分類すると，(偶，偶)，(偶，奇)，(奇，偶)，(奇，奇）の４通りになります．今考えているのは５頂点なので，鳩の巣原理により，その頂点のうちの２つの座標の偶奇性の対が一致することになります．その２つの座標の差は（偶，偶）になるので，その２つの座標が表す２点の中点も整数座標になります．つまり，その２つの頂点を結ぶ辺の中点が格子点になってしまうので，問題の答えは「できない」になります．

この論理は数学が得意でない子には難しいかもしれません．つまり，理屈だけ示しても実感を伴わないでしょう．そこで，格子の描かれたプリントの登場です．

「格子点を５つ自由に選んで，すべての組合せを線で結んでみよう！」

「途中に格子点がある辺が見つかった人，手を挙げてください」

「どの線の途中にも格子点がないようにできた人，手を挙げてください」

もちろん，２つ目の問いかけには一斉に手が挙がります．３つ目の問いかけにも手を挙げた子がいましたが，長さが２以上の水平・垂直な線分の途中に格子点があることを見逃していただけでした．それを注意した上で，全員一致の多数決で答えが「できない」であることを理解します．

それはそうだけれど，まるで別の話が始まってしまったなぁと思う生徒も多かったはずです．ところが，まるで四色問題と関係なさそうな問題が四色問題と絡んでくるのです．

グラフ（辺で結ばれていない頂点の組があってもよい）の頂点を格子上に配置して，どの辺の途中にも格子点がないようにできるとき，そのグラフは**格子配置可能**であるということにしましょう．実は，次の定理を証明することができます．

定理　グラフが 4-彩色可能であるための必要十分条件は，そのグラフが格子点配置可能であることである．

必要性の証明は簡単ではありませんが，十分性は上の問題と同じように理解できます．グラフが格子点配置可能ならば，配置したときの座標の偶奇性の対（４種類）に応じて４

色で色分けします．もし２つの頂点の色が同じになっていたならば，その２つの座標の偶奇性の対が同じなので，その２点の中点も格子点になります．しかし，その中点を通るような辺はないように配置しているので，その２頂点は辺で結ばれていないはずです．つまり，辺で結ばれている２頂点は異なる色になっているので，グラフの４-彩色が得られたことになります．ということは，平面的グラフが格子点配置可能であることを示せば，四色定理が証明できたことになるのです！

とはいえ，このような言い換えをしたからといって，問題が簡単になったわけではありません．しかし，次のような数学的な活動を誘発して，子どもたちを研究に誘うことができます．実際，「GeoGebra」のような幾何学支援ソフトウェアを使えば，楽しくチャレンジできるでしょう．

- 平面的グラフの無限系列をいろいろと考える．
- 系列ごとに分担して，具体的なグラフの格子点配置を考える．
- 一般化して，系列内のグラフがすべて格子点配置可能であることを論証する．

実は，この格子点配置のネタも前述の中本先生がメキシコで開催されたある国際会議に参加してきたときに仕入れてきたものでした．それをもとにして上の定理を考えました．それを強調して，数学がたくさんの人たちのコミュニケーションの上に成り立っていることを理解してもらいます．さらに，私が参加した研究集会や国際会議の写真を見せて，数学を楽しいでいる人たちの姿を示し,「その仲間になってくれるとうれしい」と話を締めくくりました．

講演が終わって校長室で談話していたときに，ある先生から「ある女子に『おもしろかったか』と聞いてみたら,『かなり』と答えてくれた」と言われました．おそらく数学的な事柄のすべてを理解してくれたわけではないでしょう．それでもおもしろいと思ってもらえたのは，講演の前半に白地図の色分け（前回はカード並べ）の活動を取り入れたことが大きいでしょう．それだけではなく，後半に私という「人」がいかに数学とともに生きてきたのかを伝えることに注力したことも重要です．

完成された数学を外部装置として学ぶだけでなく,「自分」の発露として数学を営む．それが「もっと自由に考える」ということなのです．