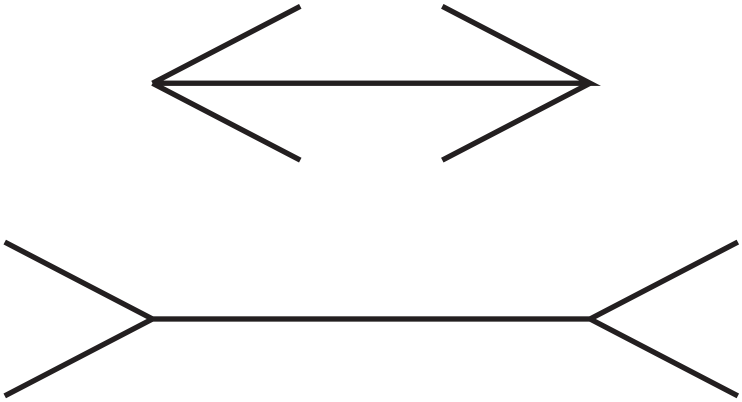
数学実験！

広島大学大学院理学研究科
木村　俊一

「錯視」というものがある．古典的なのは，どう見たって長さが違う 2 本の線分が，測ってみると同じ長さ，というものだ．



新しいものでは，紙に印刷されているはずの図形が動いて見えたり，膨らんで見えたりする．人間の脳にそのように錯覚する仕組みがあって，みなそういうのを「面白いな，不思議だな」と視覚的錯誤を楽しんでいるのである．定規で測ってみて,「この定規はおかしいぞ，上の線分が短いに決まっているじゃないか！」と怒りだす人はいない．

学生たちに数学を教えていて思うのだが，数学や論理においても，人間の脳に，錯覚を引き起こす一貫した仕組みがあるような気がする．例えば,「A ならば B」という文章は，仮定 A が正しいのに結論 B が正しくない，という場合にのみ誤りである，と口を酸っぱくして説明しているのに，なかなか正しく伝わらない．書類を「これ，すぐに出さないと締め切りに間に合わないよ」と言って学生に手渡すと，さっそく記入して事務に持っていって,「締め切りは先週だったと言って叱られましたよ」と，文句を言ったりする.「締め切りに間に合わない」という結論が正しいので，論理的には私は全く嘘を言っていないのであるが，学生は自らの論理的錯誤を楽しむどころか，私のことを非難するのである．

遅れた書類のみならず普段の講義においても，学生の論理的錯誤を指摘したときになかなか納得してもらえない，というのは多くの数学教師が経験することであろう．目の錯覚と違って，論理的な議論によってしか真偽を判定できない状況では，なかなか論理的な錯覚を自覚できないらしいのである．しかし，本来論理的錯覚も，視覚的錯覚と同じくらい面白いものではないだろうか？少なくとも数学者の大半は，思

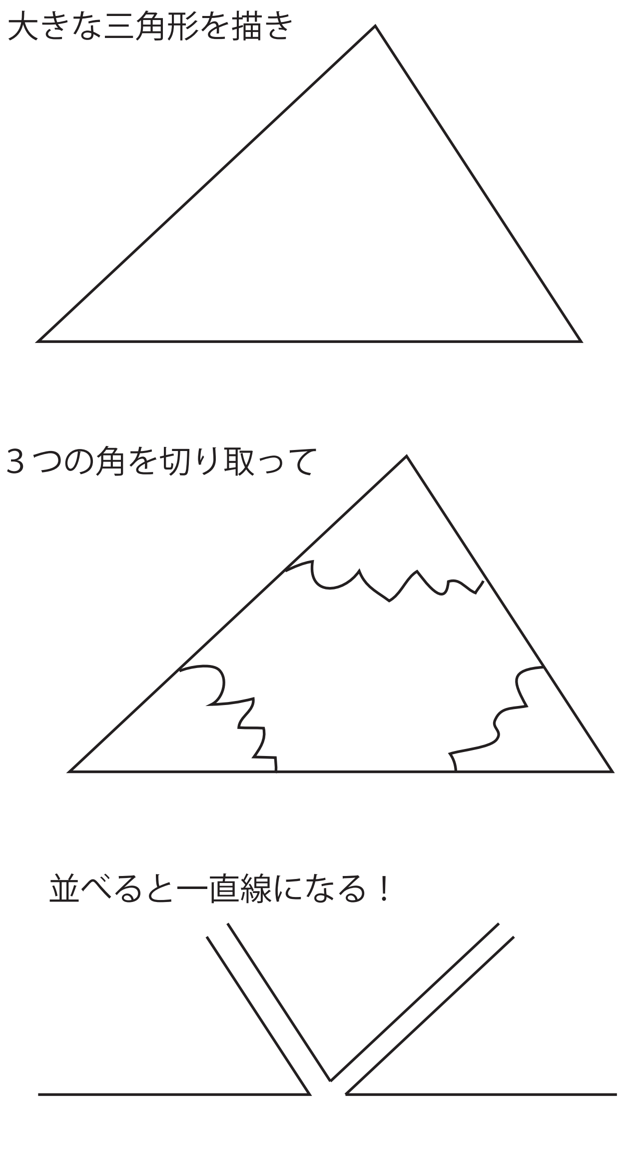
2014 年度秋季総合分科会市民講演会（2014 年 9 月 28 日）

いがけない議論や論法によって，とても正しいとは思えないような定理が証明されることこそ楽しい，と思って数学を研究していると思われる．もし目の錯覚と同じように，論理とは別のところで真偽が判定できるならば，素直に論理的錯覚を「面白いな，不思議だな」と楽しめるのではなかろうか？例えば実験すれば，真偽がわかる場合とか．本稿では，そのような数学実験をいくつかご紹介し，数学で錯覚することの楽しさを味わって頂こうと思う．

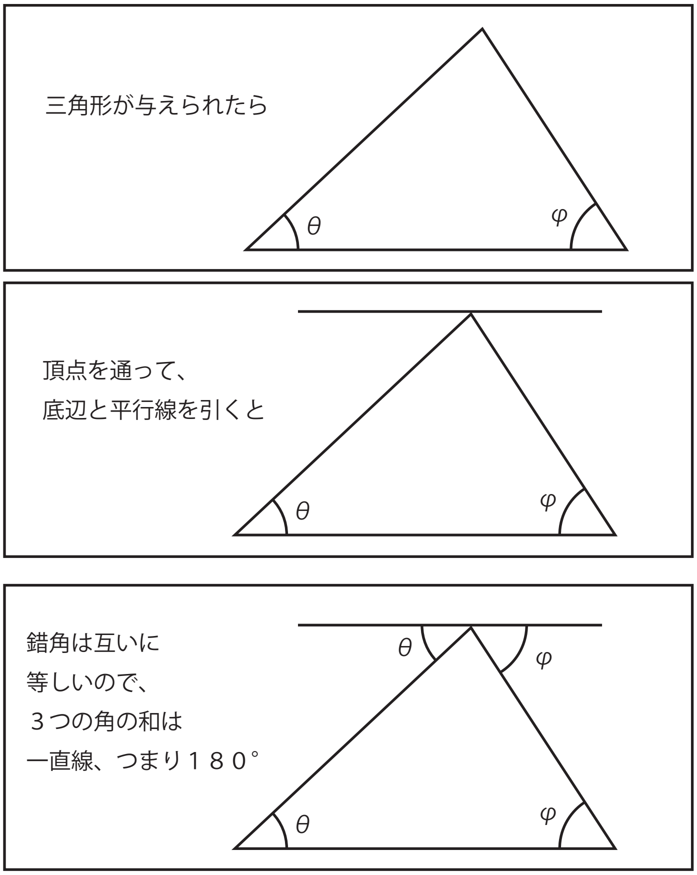
[実験 1] 三角形の内角の和は？

これは私が小学生の時に感動した数学実験である．

なるべく大きな紙と長い定規を用意して，大きな三角形を描き，正確にハサミで切り取って，3 つの角を破り取り，並べると確かに一直線に並ぶ．三角形の内角の和が 180°，ということが実験で確かめられるのである．

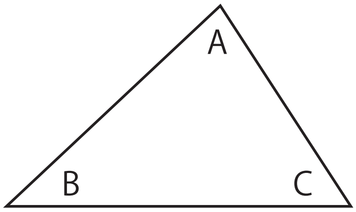


中学校に入ってから習ったのだが，実は実験なんかしなくたって，三角形の内角の和は思考実験でわかってしまう．つまり三角形の底辺の平行線を，頂点を通るように引いてみよう．平行線があれば，錯角は互いに等しいので，図を見れば，三角形の内角の和が 180° だとわかってしまう．そう考えて良ければ，上記の数学実験は，実は実験する必要はなかったことになる．

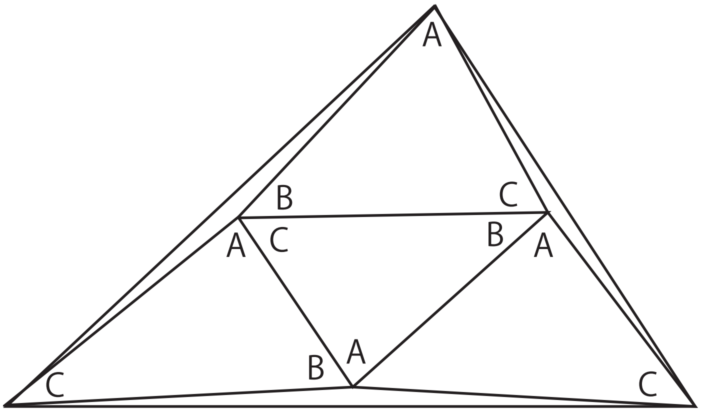


ところが，この数学実験をもっと大きなスケールで実際にやってみた数学者がいた．数学の王者と呼ばれたガウス（1777–1855）である．1820 年代に，ドイツの 3 つの山の山頂を結ぶ巨大な三角形の内角を測定し，その和を計算したのである．考えれば結果がわかるはずの実験を，そんなことは百も承知だったはずのガウスが，なぜわざわざやってみたのだろう？そしてその結果は理論通りに 180° だったのだろうか？そして，なぜ手間のかかる巨大三角形を使ったのだろう？

まず簡単に答えられる疑問から片付けていこう．なぜ超巨大三角形を使ったのか？例えば下の図の三角形の内角の和が 180° よりも大きかったとしよう．A, B, C がその内角で，$A + B + C > 180°$ というわけである．



次に，この三角形のスケールを 2 倍にしてみる．そのためには，同じ三角形を 4 つ並べてやれば良い．ところが，三角形の内角の和 $A+B+C$ が 180° をこえているので，次の図にようにちょっと不思議なことが起こる．

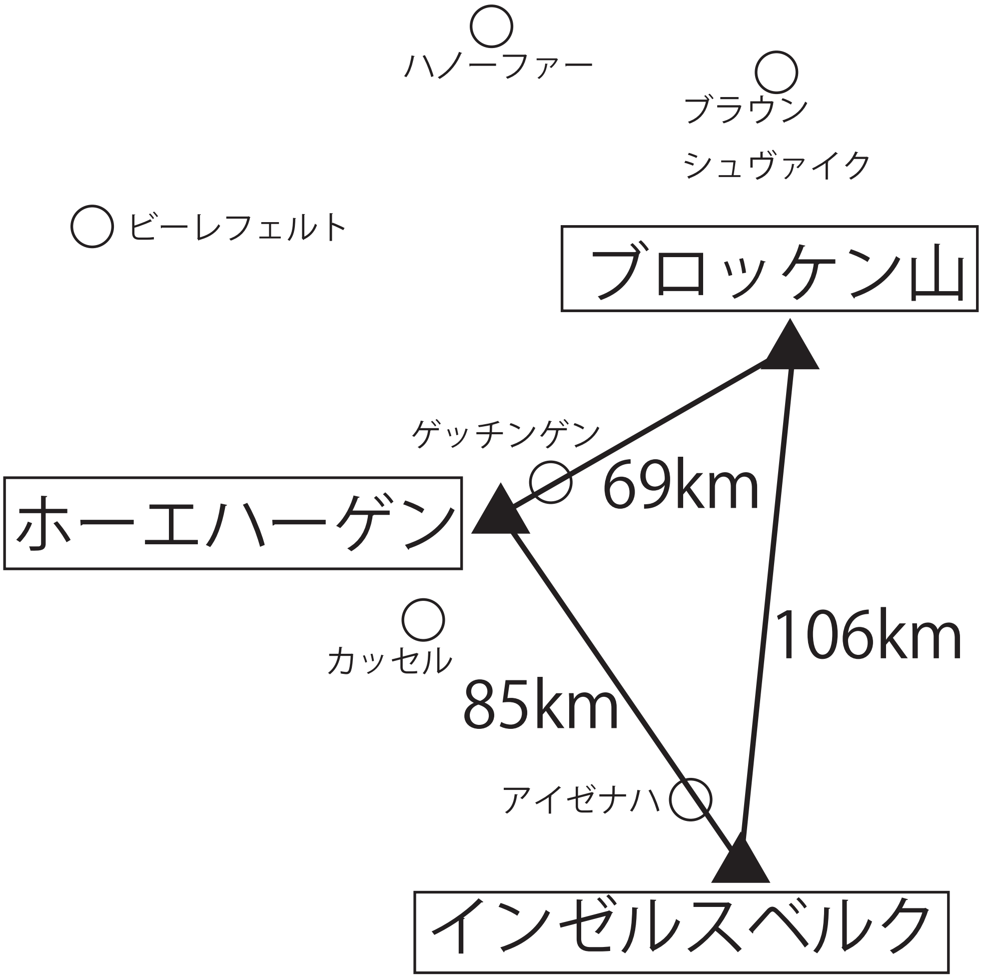


$A+B+C$ が一直線にならないので，スケールを 2 倍にした三角形では内角が A, B, C よりそれぞれ少しずつ増え，よって内角の和は $A+B+C$ よりもさらに大きくなる．すなわち，180° からのずれがさらに大きくなるのである．逆に $A+B+C$ が 180° より小さくなる場合も，同様の図を描けばわかるように，2 倍の大きさの三角形の内角の和はさらに小さくなる．要するに，もし三角形の内角の和が 180° からずれるのであれば，そのずれは大きい三角形で調べた方がよくわかるのだ．

では，次の疑問にとりかかる．なぜガウスは，わざわざこんな測定を行ったのか？これについては，決定的な正解は見つかっていない．ガウスが実際にどういう実験をしたのか，Breitenberger という研究者が Gauss's Geodesy and and the Axiom of Parallels という論文で詳しく報告してくれているので，見てみることにしよう．

巨大三角形の 3 つの頂点の 1 つ目がガウスの本拠地ゲッチンゲン大学ほど近くの標高 508m の丘，ホーエハーゲンだ．ここには今，ガウスの偉業をたたえてガウスの塔が建てられている．そしてあとの 2 頂点は，ここから見える，なるべく遠い地点が選ばれる．2 つ目が，ワルプルギスの夜に魔女が集うという伝説やブロッケンの妖怪で有名なブロッケン山，標高 1146m．ハルツ山地の最高峰である．そして 3 つ目がやや南方，チューリンゲンの森の中のインゼルスベルク，標高 916m．ブロッケン インゼルスベルク間の距離が 106km で最長辺，そしてホー

エハーゲンからはインゼルスベルクまで 85km，ブロッケンまで 69km である．



ちなみに，広島大学からまっすぐ北へ 106km 行くと，出雲市だ．中国地方を縦断するスケールの三角形の内角の和を計測したわけである．さて，そのような巨大三角形の計測結果は，以下の通りである．

それぞれの方向を，真南から時計回りに測った角度

ブロッケンからホーエハーゲン	58°	17′	23.377”
ブロッケンからインゼルスベルク	5°	10′	37.744”
ホーエハーゲンからブロッケン	238°	17′	27.103”
ホーエハーゲンからインゼルスベルク	324°	31′	25.536”
インゼルスベルクからブロッケン	185°	10′	59.970”
インゼルスベルクからホーエハーゲン	144°	31′	29.825”

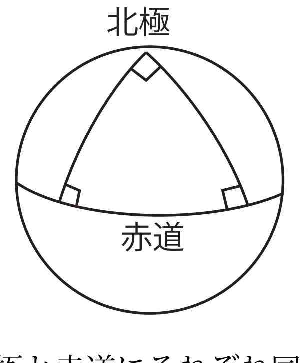
各地点での三角形の内角

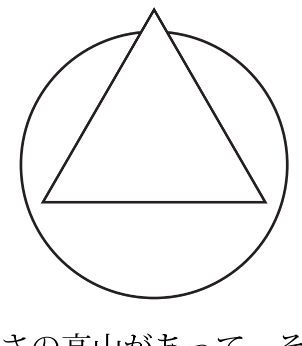
ブロッケン	53°	6′	45.633”
ホーエハーゲン	86°	13′	58.433”
インゼルスベルク	40°	39′	30.145”
合計	180°	00′	14.211”

ガウスのもとで測定を行ったグループの測定誤差は，2 秒を越えることは滅多になかったという．すると，6 カ所での誤差が全部悪い方向にずれても，誤差は 12 秒より小さいはずだ．ところが，角度の合計の 180° とのズレは，14.211 秒だ．この巨大三角形の内角の和は，180° ではない，という結論なのか？

ガウスが測定したのは，三角形のそれぞれの頂点での内角ではなく，もう 2 つの頂点への方角をそれぞれ測定して，その差として「内角」を計算で求めた，ということに着目しよう．これは本当に三角形の内角の和を求めたことになっているのか？

話を簡単にするために，もっと巨大な三角形の内角の和を考えてみよう．北極を一つの頂点とし，赤道上に 2 点をとって，三角形を作る．赤道の 2 点の経度がちょうど 90° ずれるようにすると，図のように，全ての内角が直角で，言わば直角正三角形ができる．





北極と赤道にそれぞれ同じ高さの高山があって，それぞれの頂点から互いに他の 2 頂点が見える，という状況であれば，3 次元空間に正三角形ができ，その頂点で内角を測ると 60° になっているわけだが，それぞれの頂点で方位を測定して，その差を調べると，球面上では 90° になってしまう．つまり，これは 3 次元空間の中の三角形の内角の和を計算したのではなく，大円を「直線」と見なす球面三角法における三角形の内角の和を計算したことになっていたのである．ガウスは球面三角法もよく知っていて，内角の和は 180°00′14.85348” になると予測していた．予測と測定の違いは 0.642 秒なので，完全に測定誤差の範囲内であった．

以上の状況証拠から，ガウスが大変な手間をかけて巨大三角形の内角の和を測定した理由として，次の 3 つの説が挙げられている．

(1) 測定技術のチェック．遠距離でも測定誤差が 2 秒程度の範囲で測定できるのかを確かめたのではないか？

(2) 小さい誤差の積み重ねの補正．ガウスはこのころハノーファー王国の大規模な測量作業にとりかかっており，もっと小さな三角形を大量に測定して地図の作成作業をしていた．それぞれの三角形での測定誤差は小さくても，たくさんの誤差が積み重なると，全体としては大きい誤差になっているかもしれない．巨大な三角形を測定することで，それをまとめて補正したのではないか？

これらの説に加えて，数学者が大好きな，次のような説がある．

(3) この現実世界が，実はユークリッドが考えた空間と違う可能性があるので，測定で確かめたのでは？

三角形の内角の和が $180°$ だ，ということは，測定しなくても考えればわかる，と先に述べたが，実は「平行線が存在する」ということを仮定した上での話であった．もしもこの現実世界で，100km というスケールでは平行線公理が成り立たないとすると，三角形の内角の和が $180°$ になるとは限らないのである．実際球面三角法では，全ての大円は互いに交わるので平行線は存在しない．球面三角法で三角形の内角の和が $180°$ にならないのは，これが理由だと言うこともできる．ガウスは公には何も言っていないが，秘密のノートで非ユークリッド幾何学を研究していたことがわかっている．この巨大三角形の測定は，実はそういう数学実験だったかもしれない，というわけである．

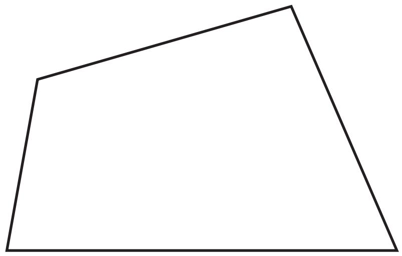
さて，ガウスの真意は秘密のノートにも書かれていないので上のどれか，あるいはまた別の事を考えていたのか，正解はわからないのであるが，ガウスにわからなかったことで，今ならわかっていることがある．三角形を球面の三角形でなく，実際に 3 次元空間の中の三角形として正確に内角を測定したら，どうなっていただろう，ということだ．アインシュタインの一般相対性理論を仮定し,「直線」とは光の進路であるとすると，ガウスの超巨大三角形の内角の和は

$$180°00'00.000000000000000000000002"\text{弱}$$

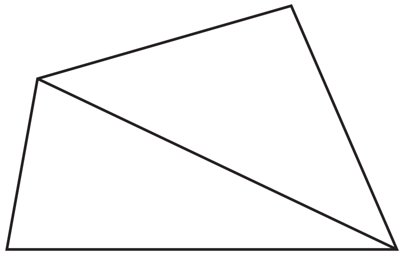
となるはずなのである．残念ながら現代の測定技術をもってしても，実際に三角形の内角を測定してこの誤差を読み取ることは不可能だ．あくまでもアインシュタインにならって思考実験をすればこうなる，という数字である．

さて，巨大な数学実験は難しいので，ユークリッド幾何で近似してよいサイズに戻って，次の問題を考えてみよう．

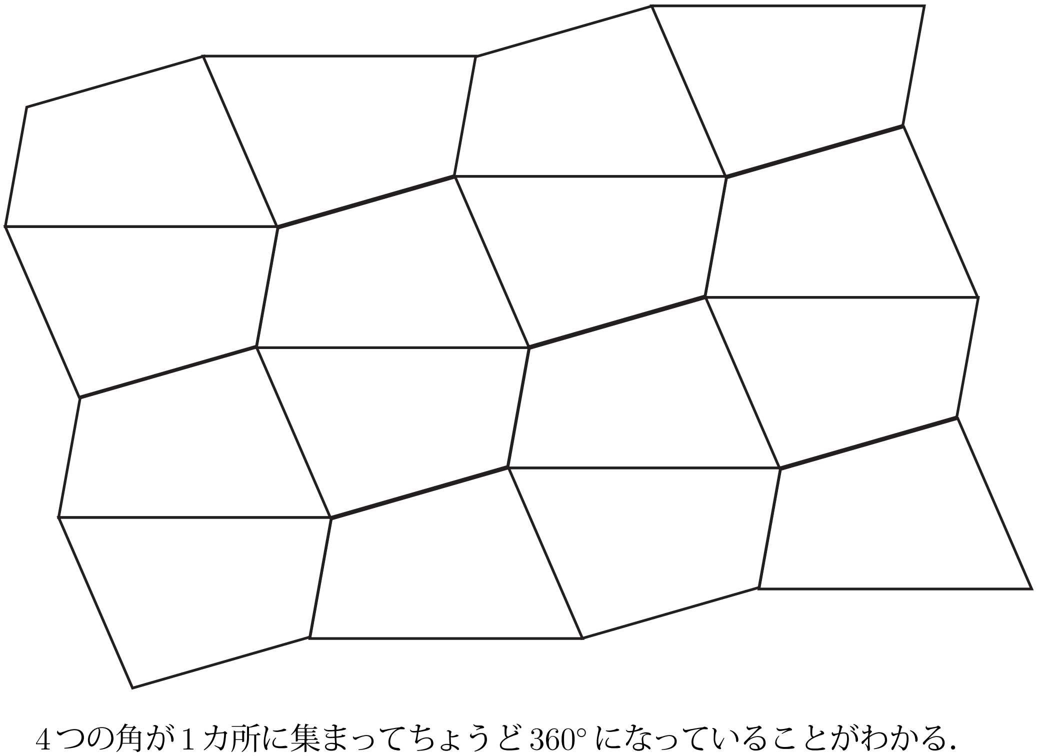
[実験 2] 三角形の内角の和は？



内角の和，と言われれば，四角形を三角形２つにわけて，それぞれ内角の和が 180° なので，それを足して 360° になることがわかる．



でも，せっかくだから実験してみることにしよう．合同な四角形を沢山用意して並べていくと，どんな四角形でもそれを並べて平面をタイルばりできることがわかる．

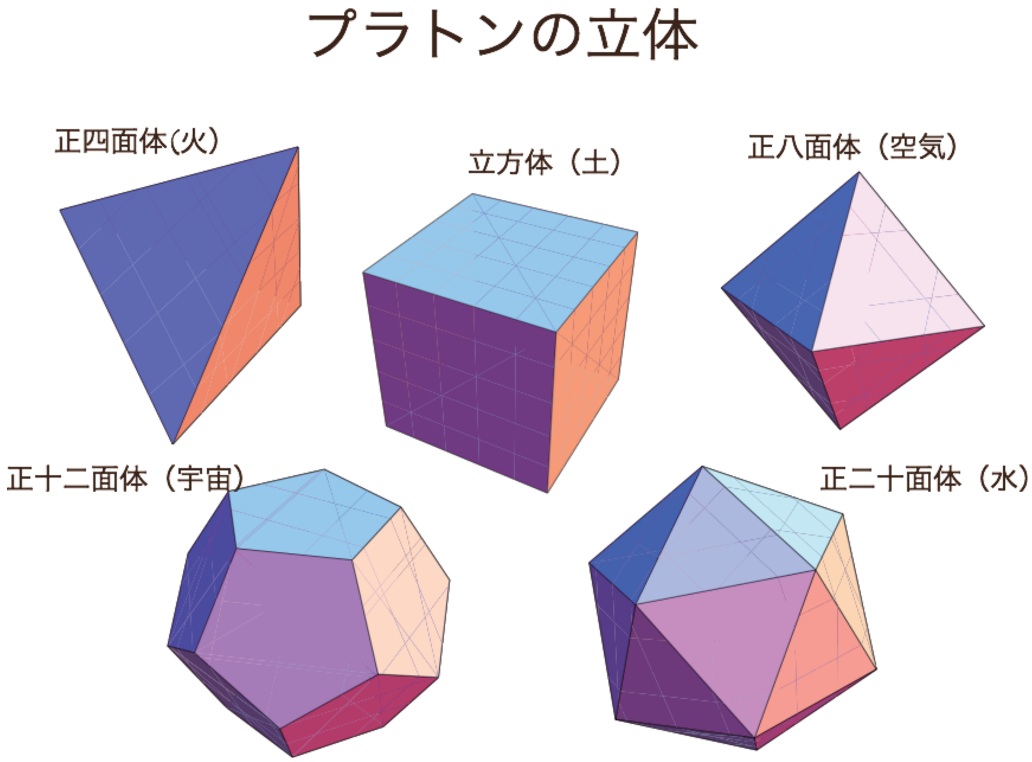


4 つの角が 1 カ所に集まってちょうど 360° になっていることがわかる．

申し訳ない，ちょっとショボい実験であったが，実は次の実験の伏線である．2 次元だと，どんな四角形でも平面をタイリングできることが

わかったが，では3次元だとどんな図形が空間をタイリングできるか？つまりレンガのように積み重ねて，隙間なく空間を埋め尽くすことができるだろうか？

古代ギリシア時代，プラトンは5つの正多面体がこの世界を生み出している，と論じた．



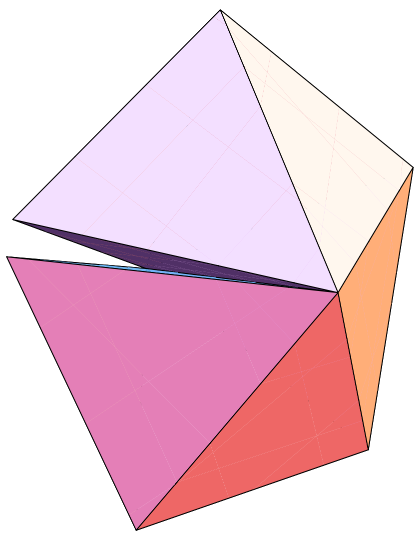
上の図のように，この世界は土，水，火，空気という4つの元素からなり，正四面体が火，立方体（正六面体）が土，正八面体が空気，正二十面体が水，そして正十二面体が宇宙（ !? ）をあらわす，というのがプラトンの説である．これに対してアリストテレスは「物体を形であらわそうとすること自体が不合理なのである．（中略）空間を埋め尽くせる立体は正四面体と正八面体しかないからだ.」と反論している（天体論第3章8節の冒頭）．そう言われたら，ぜひやってみたい実験がある．

[実験3] 正四面体で空間をタイリングすると，どのように埋め尽くされるか？

アリストテレス以来，少なくとも1800年間，誰もこの実験をしなかったように思われる．記録に残っている中では，最初にこの問題について真剣な意見を述べたのは，レギオモンタノス（1436–1476）だ.「アリストテレスの言葉にもかかわらず，空間を埋め尽くさない正多面体について」という題名の著書を残している．ただ，わかるのは題名だけで，この本そのものは残っていないので，レギオモンタノスがどう

いう議論をして何を言ったのかはわからない．内容までちゃんとわかるのは，ミドルブルクのパウル（1446–1555）．正四面体で空間を埋め尽くせるならば，一点で頂点を共有する正四面体を集めた図形は，正三角形を面とする正多面体となるはずだが，どれも条件を満たさない，という．実際，正四面体の一辺の長さを 1 とすれば，そうやってできる正多面体の一辺の長さも 1，またその正多面体の頂点から中心までの距離も 1 になるはずである．正三角形が面となる正多面体は，正四面体，正八面体，そして正二十面体の 3 種類だが，一辺の長さを 1 とすると頂点から中心までの距離は正四面体では $\dfrac{\sqrt{6}}{4} = 0.612\cdots$，正八面体では $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\cdots$，正二十面体では $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0.951\cdots$ となり，いずれも条件にあわない．正多面体の中心から頂点までの距離なんて，アリストテレスの時代でもちょっと考えればわかるはずの話であった．

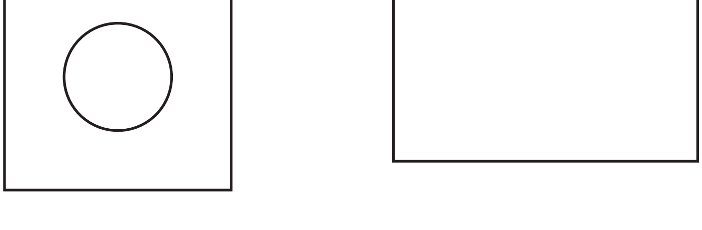
しかも，そんな面倒な計算をしなくたって，実験をすれば，正四面体が空間を埋め尽くさないことくらい簡単にわかる．正四面体の模型を 5 つ用意して，一辺を共有するように並べてみよう．



正四面体 5 つでは隙間があいてしまい，しかもその隙間は正四面体では埋めようがないことが，明らかである．この簡単な実験をしなかったばかりに，人類は 1800 年間もアリストテレスにだまされ続けていたのだった．

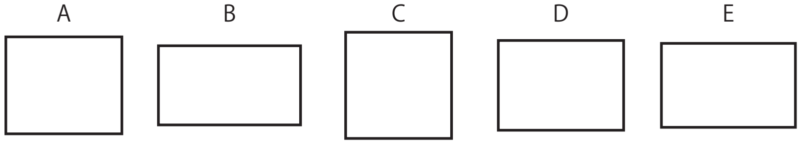
[実験 4] 最も美しい長方形の縦横の比は？

縦横の比が黄金比の長方形を，人間は最も美しく感じる，という伝説がある．また，それは欧米人の好みであって，日本人なら白銀比の方を好むのだ，というまた別の伝説がある．なぜ私が「伝説」という言葉を使っているのかの説明はあとまわしにして，まずは皆さんがどういう長方形を好むか，実験で調べてみよう．長方形 A から E までが，2 個ずつ 10 組のペアーにわかれている．それぞれのペアーを見比べて，どちらの長方形を美しいと感じるか，美しいと思う方にマルをつけていただきたい．マルをつけ終わったら，A から E までそれぞれマルがついた個数を数えて，一番マルが多かったものを，あなたが「最も美しいと思う長方形」である，としよう．マル 3 個のものが 2 つあらわれたら，直接対決で「より美しい」としたものを勝者と決める．マル 3 個のものが 3 つあらわれたら，それは三つ巴で決着がつかないので，残念ながら「不定」とする．また，全てマル 2 個になった場合も不定である．どの長方形がどれであるか,「正解」の確認は後回しにして，まずは虚心坦懐に，長方形の直接対決を楽しんでもらいたい．図のように，気に入った方の長方形にマルをつけてみてください．

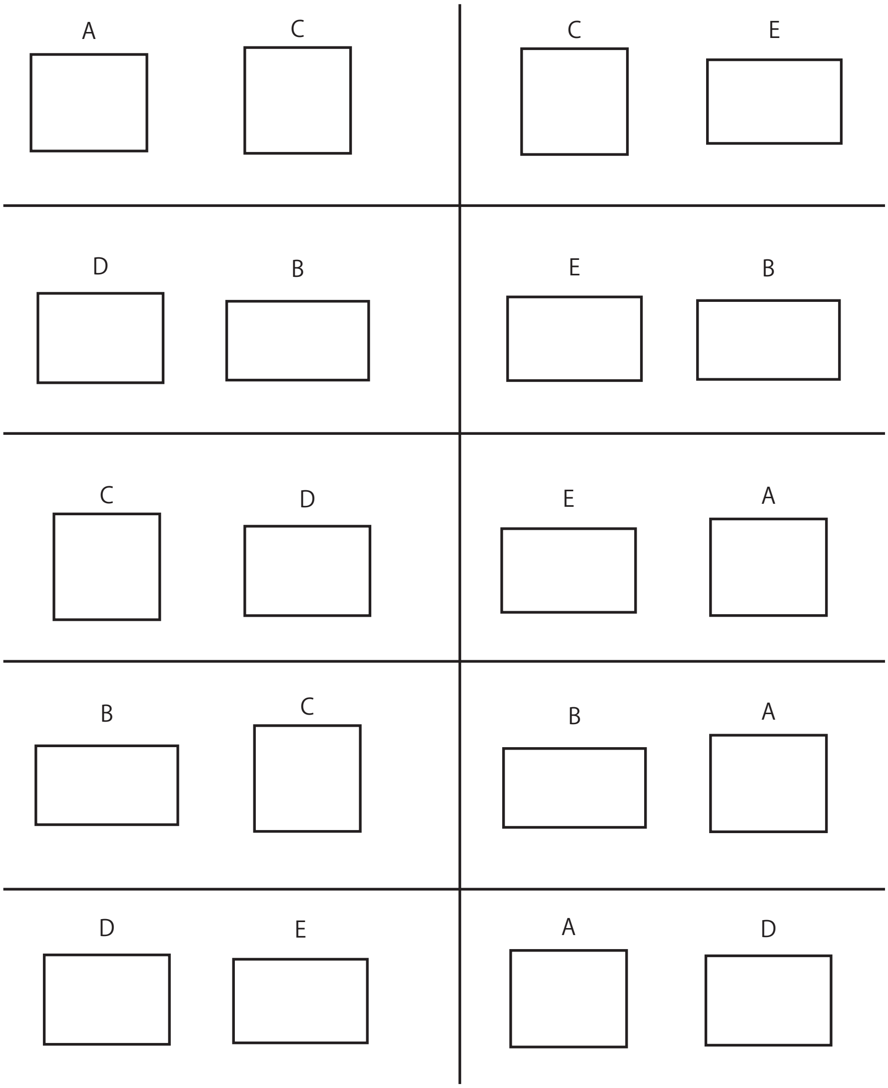


ところでこの実験，あらかじめ何人かの数学者にためしにやってもらったのだが，驚愕すべき結果となった．なんと過半数がマルを数え間違えて，合計が 10 にならなかったのである．マルをつけ終わったからと言って油断はせず，数えるところも慎重にやっていただきたい．

次の５つの長方形の間の好き嫌いを、リーグ戦で決めてみましょう。



それぞれのペアで、好きな方のアルファベットに〇をつけてください。



丸を付けた数　A の個数：　B の個数：　C の個数：

D の個数：　E の個数：

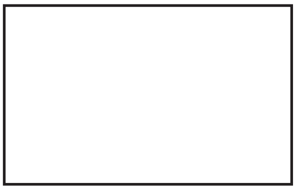
さて，気になる実験結果であるが，市民講演会で集まった用紙の合計は

箱	A	B	C	D	E
人数	4 人	3 人	9 人	13 人	18 人

となった．それぞれの箱のサイズは

箱	A	B	C	D	E
縦横比	1.2	1.8	1	1.4	1.6

なので，黄金比がもっとも人気がある，という「常識」を裏づける結果となった．ところが，その数日後，数学科の 1 年生に同じアンケートをやってもらったところ，1 位が C，2 位が A という結果になった．そもそも，このアンケートをやってもらえばわかるが，同じ人でも気分によってだいぶ答が変わるんじゃないだろうか？私自身は「美しい」長方形を 0.2 単位で「決める」こと自体が胡散臭いと思っている．小学校で有効数字というのを習うはずだが，この場合小数点以下 2 桁目はなんの意味もないと思う．ましてや，1.6 ではなく「黄金比がもっとも美しい」などとこの実験結果から結論するのは，ナンセンスである．下の図にある，黄金比の長方形と 1.6 の長方形を並べて,「私の感性からすると，黄金比の方がはっきり美しい」と断言できる人は皆無であろう．黄金比を用いた建築を宣伝道具に使ったル・コルビジェも 1 : 1.006 の長方形は正方形と見分けがつかない，と告白している．

念のためつけたしておくと，私は黄金比は美しい数だと思っている．しかしそれは長方形に描けばわかるような外見の美しさではなく，下の式にあらわれるような内面的な美しさなのである．

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

古代ギリシアで黄金比が美しいとされていたのかどうか，よくわかっていないが（Golden Ratio ＝黄金比という用語が初めて使われたのは，19 世紀になってから．Divine Proportion=神聖比率という用語も，15 世紀のルカパチョリやダヴィンチが使い始めたものである．パルテノン神殿の設計に黄金比が使われた，というのも，証拠は一切ない．詳

しくは George Markowsky の論文 “Misconceptions about the Golden Ratio” 参照）もしそのころから黄金比が大事なものと思われていたとしたら，それは正五角形や正十二面体の作図にあらわれたからだ，と個人的に思っている．正五角形がコンパスと定規で作図できるとか，正十二面体のような立体図形が存在する，なんていうことは，確かにピタゴラス学派が誇れる素晴らしい研究成果だから．外見にとらわれず，黄金比の内面的な美しさに思いを馳せてほしい．

ちなみに，上の 2 つの長方形は，左が $1 : 1.6$ で，右が $1 :$ 黄金比である．印刷が正しくされていれば，の話ではあるが．