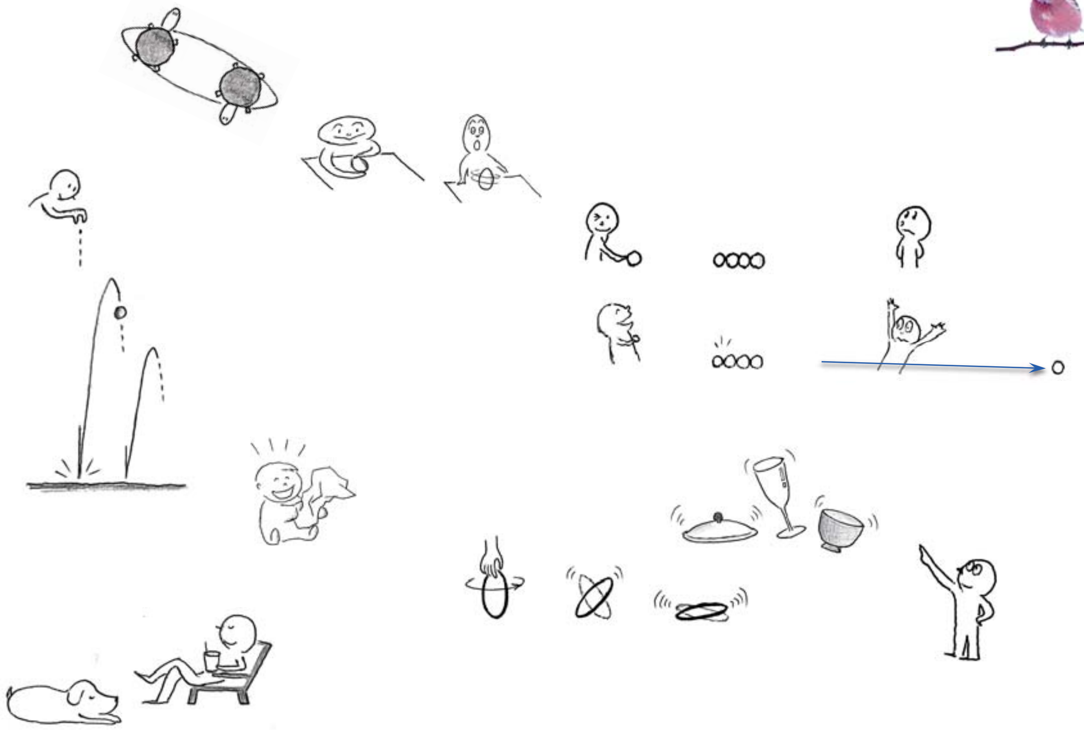
おもちゃからの数理モデル



時枝正

数学会市民講演　２０１４年３月

いくつかおもちゃをごらんにいらっしゃいませんか？

ここで「おもちゃ」には特別な意味をもたせています ── 日常生活ですぐ見つけられるか作れて、
ところが気の利いた遊び方をしてやると驚くべきふるまいをみせ、科学の玄人をもフムムと
考えさせる ── そんなものを意味するのです。

ちいさい子に既成玩具をプレゼントしたとき、その子がプレゼントには目もくれず、
その代わり包装紙や空箱でばかり遊ぶのを目にされたことがおありでしょう？
大人は「最先端」とか「有用」とか「深い」とかラベルの貼られている理論を話題にしがちです。
それらは科学の花であって、もちろん重要です。
しかしこの講演では
おもちゃの実演から新しい数理モデルをとりだしてゆく過程をわかちあいたいと思います。
花へのアプローチのみならず、芽からのアプローチを試みよう、というわけです。

お願い：

市民講演では、その場で、いろいろおもちゃの実演をごらんにいれました。
この報告をお読みになっている方々には、読むだけでなく、
おもちゃの動画をごらんになっていただきたいのです。私の名を検索すれば簡単にみつかります
（米仏の google.com や google.fr にローマ字で Tadashi Tokieda と入力すればもっと出てきます）。

水泳を体験するのに、他人が泳いでいるビデオを見るのはどれほど役立つでしょうか？
　　ビデオも見ず、水泳とは何ぞやという文章を読むのはどれほど役立つでしょうか？

おもちゃを見ずに言語的な解説を読むのは、水泳の文章を読む如き選択です。
それではいけません。言語化ずみのできあい数理を受け身鑑賞するのではなく、
誰もまだ気付いていなかった、もちろんまだ数理になっていない生の現象を、
自分で初めて気付き数理としてとりだす、それこそ私たちの「芽からのアプローチ」なのですから。

ただ、動画を見るのは見ないよりはるかによいにせよ、他人が泳ぐビデオを見る如きものです。
一層よく、楽しいのは自分でおもちゃをいじって遊んでみること。
そうすればみなさんは、実地に泳いでみる、つまり研究に参加されることになります。

百聞は一見に如かず、百見は一験に如かず。

参考文献：

おもちゃや手品や数理モデルは

　　『数学セミナー』「こどもの眼・おとなの頭」（２０１３年４月号以来毎月連載中）

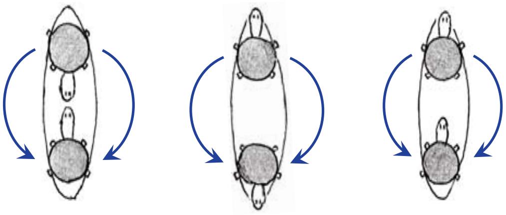
に広範囲の新鮮な話題を載せています。また

　　戸田盛和『おもちゃの科学セレクション』１、２、３巻（日本評論社）

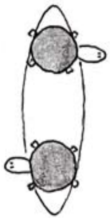
もお薦めします。科学啓蒙書の世界的な古典の一つです。各巻の解説は私の筆で、併せてお読み
願えれば幸いです。

あっち回りが好きな石（celt、rattleback、wobblestone）

有名なおもちゃです。今回紹介したのは、舟みたいな形の台に亀が２匹のっており、
２匹の方位を調整できるタイプでした。机に置いて回してみます。すると



亀がこれらの方位のときはどちら向きにも回ってくれる。ところが



２匹の方位をこう置くと、
前向きにはなめらかに回るようだが、
後向きに回すと、がたがた揺れ始め、<u>自発的に回転を反転</u>して前向きに回るのです。
ふしぎですねえ？

多くの論文には「前向き回転は安定で、後向き回転は不安定」と
高尚／難解な数理モデルを構築して「証明」してあります。

あれは誤りです。

後向きに回すと縦揺れ（pitching）が始まって反転するのは確かにそうですが、
前向きに回してもやはり横揺れ（rolling）が始まって反転するのを市民講演で実演しました。
前向きの不安定性は弱いので、えてして反転するまでに摩擦で運動が止まってしまい、
気付かれなかったのでしょう。

摩擦条件のよい面上で実験すれば、後向き➛前向き➛後向き➛前向き➛・・・と
くりかえし反転させることさえ可能です。

あっち回りが好きな（chiral）石は
電話の受話器に重りをテープで固定したりして手軽に作れます。
長く細い自然石にも chiral なふるまいを示すやつが時々見つかります。

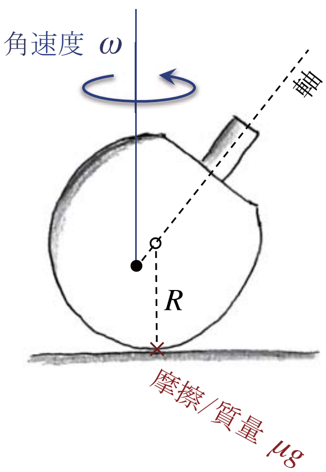
さかだちごま（tippy top）

先のおもちゃは現象を観察し楽しむことで満足しました
（それでもちょっと気の利いた観察をするだけで専門論文の誤りを暴けたのでした）。
けれど、今度は現象から数理モデルをとりだしてみましょう。

おなじみ、回すとひょいとさかだちするこまです。

数理モデルは定量的な予言ができてこそ一人前。
さかだちに要する時間をみつもれるでしょうか？

応用数理をやるにあたり、主役は微分方程式だ、という迷信にしばしば遭います。
そうではなく、本当に基本的なのは次元解析です。
面白い現象１０００のうち、次元解析で１００くらいはせめて何か一面を理解できますが、
微分方程式が書ける段階までもちこめるのはせいぜい２、３にすぎません。
（数理系の先生方、科学の消費者でなく生産者を育てようと思ったら、伝統的な課程に加えて
次元解析、一般に order-of-magnitude estimation を学生さんにみっちりしこんで下さいね。）



「次元解析」

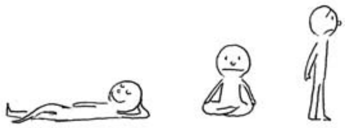
$$\left.\begin{aligned} [\,R\,] &= \text{長さ} \\ [\,\omega\,] &= \frac{1}{\text{時間}} \\ [\,\mu g\,] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}$$

$$\approx \frac{2 \times 2\pi \cdot 30}{{}^{1}\!/_{4} \times 1000} \approx \text{約 } \mathbf{1.5} \text{ 秒}$$

実は次元解析から得られるのは

$$\text{逆立ちにかかる時間} \times \omega \sim f\left(\frac{R\,\omega^2}{\mu g}\right)$$

までだが、一番単純な $f(x)=x$ を採ってうまくいった



逆立ちがおきる条件詳しくは．．．

δ ＝重心と曲率中心の距離 ／ R
ε ＝ 1 − (軸のまわりの慣性モーメント ／それに垂直方向の慣性モーメント)

とおいて

十分まるく、二つの中心が離れていること： $\dfrac{\varepsilon}{\delta} \lesssim 1$

初角速度が十分速いこと： $R\,\omega^2 \gtrsim \dfrac{g}{1-\dfrac{\varepsilon}{\delta}}$

市民講演で本邦初公開したおもちゃがありました。それは、
一方向に回すとさかだちするくせに、
他方向に回すとさかだちしない、chiral なさかだちごまです。

さかだちごまのモデルは、先ほど紹介した次元解析をはじめ、あれこれ詳しく議論できるのですが、
現在ある数理モデルはどれも、chiral なさかだちごまを解明するどころか、その存在すら許しません。
古典力学の未解決問題です。
視点を変えれば、古典力学にさえ未解決問題があるというのはすばらしいことではありませんか。

杉の玉の相転移

平底のお椀をもってきました。

杉の玉（何の玉でも構わぬが、杉を使うと実験が香ばしくなる）を２、３入れ、
お椀全体を時計回りにゆすりましょう。すると玉は時計回りに循環します。

ところがですね、玉を７、８に増やし、お椀全体を時計回りにゆすると、
反時計回り、ゆすっているのと反対方向、に玉が循環するではありませんか。
混み合い度（order parameter）を変えることにより、系のふるまいが定性的な転移をおこしたのです。
なぜでしょうか？

［現象の原型はI. Rehberg氏発見］

多角形ころりん

この２つの輪をご検分いただきたい。

同じ材質でできており、質量も等しく、それにそれぞれ密度分布は一定です。

さてころがしてみると
一つはころころころりんと喜んでころがるのに
もう一つはころがることを拒否し倒れてしまいます。

いったい何が違うのでしょう？

［A. Ruina氏製作］

答：形が違うのです。

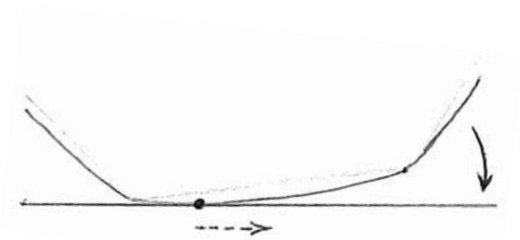
　　ころがる多角形は辺をちょっぴり外側へ凸に膨らませてあり、
　　ころがらない多角形は辺がまっすぐです。

膨らませ具合はわずか（0.1mm 以下）なのでまあ目には見えません。
そんなわずかな違いなのに、運動の性質が劇的に異なるのはなぜでしょうか？

理論的にはどんなわずかな違いであれ、違いが ＞0 である限り、運動の性質は異なる。
したがって違いをどんどん小さくしていった →0 極限のふるまいは
違い ＝0 のばあいのふるまいに収束しない、
モデルは極限操作に対し不連続だ、と結論できます。

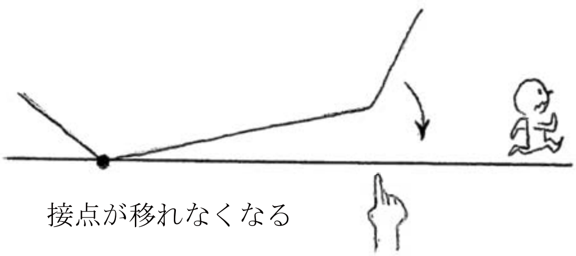
これは深刻な問題です。
というのは、モデルには測定や理想化にともなう誤差が必ずつきまとう以上、
パラメーターに対しモデルのふるまいが不連続だと、モデルは実用にならないからです。
<u>特異摂動の問題</u>といい、無限自由度のナヴィエ＝ストークス方程式が有名ですが、
私たちの多角形対は有限自由度の自然な例を与えています。

各辺を微小 ε だけふくらませると



接点が角から角へ連続的に移れる

しかし ε が0になるやいなや



接点が移れなくなる

ここで衝突！

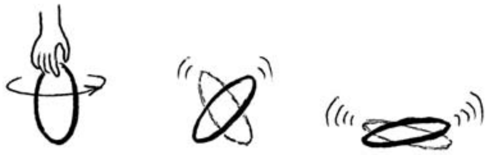
「特異摂動」

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{model}_{\varepsilon} \neq \mathrm{model}_{0}$$

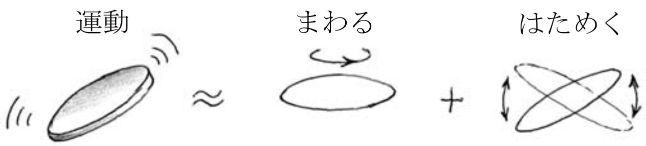
（このおもちゃの $\varepsilon \lesssim 0.1$mm）

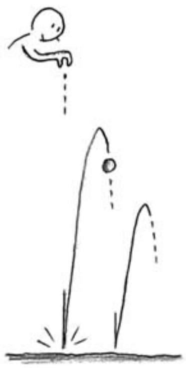
はためく輪（shuddering hoop）の音の発散

硬貨、腕輪、鍋のふた、何でもふちが円状のものをテーブルの上で回すと
初めサラン、サラン、と大雑把な音を出し、次第にシャラララ・・・と加速してきて、
止まる寸前シュワッと音が急に上ずって終わります。
ありふれた現象なのにめったに考察されません。



止まる寸前、音の振動数が無限大に発散するらしい。
しばしば次元解析と組んで威力を発揮するスケーリング解析で発散のようすに迫りましょう。





はねかえり = はためき類推：

$$\text{エネルギー } E \sim \text{高さ} \sim \text{時間}^2 \sim \text{はねかえり振動数}^{-2}$$

エネルギー減衰（地震、摩擦）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t_{\text{sing}}-t)}E = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E \sim \text{はためき振動数}$$

$$\Rightarrow \quad E^{\frac{3}{2}} \sim t_{\text{sing}} - t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{音の振動数} \sim (t_{\text{sing}} - t)^{-\frac{1}{3}}}$$

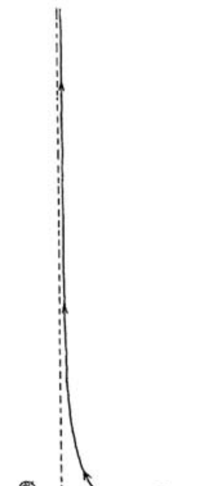
ハーバードの Junior Fellow A. Amir 君が実験を録音し
音の振動数を時間 t の函数としてプロットしてくれました。

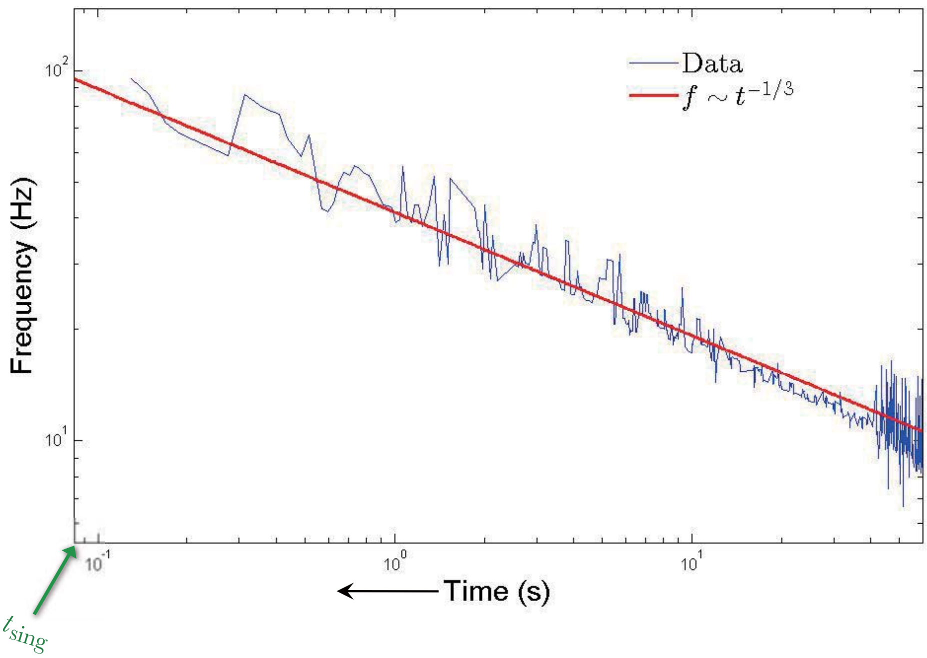
対数軸（log-log plot）ですから、指数は傾きが示します。

傾きがみごとに $-1/3$ なのにご注目。
こうきれいな実験結果は今どきなかなか得られるものではありません。

$$\text{音の振動数} \sim (t_{\mathrm{sing}} - t)^{-\frac{1}{3}}$$

log-log plot





紙風船

日本伝統おもちゃ紙風船。改めて考えると神秘的です。

紙風船をくしゃくしゃにして、とんとん叩くと、叩くにつれだんだん丸くなってきますね。
でもおよそ物体は、叩かれたらへこむのが道理ではないでしょうか？
なんだって丸くなるのでしょう？

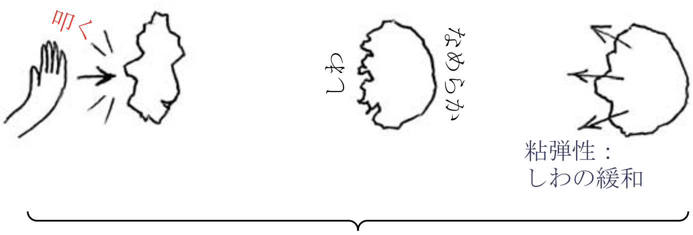
紙には、あまりしわにされると嫌がって少し滑らかに戻る性質があります。

風船の片側を叩くと何がおこるか追跡しましょう。

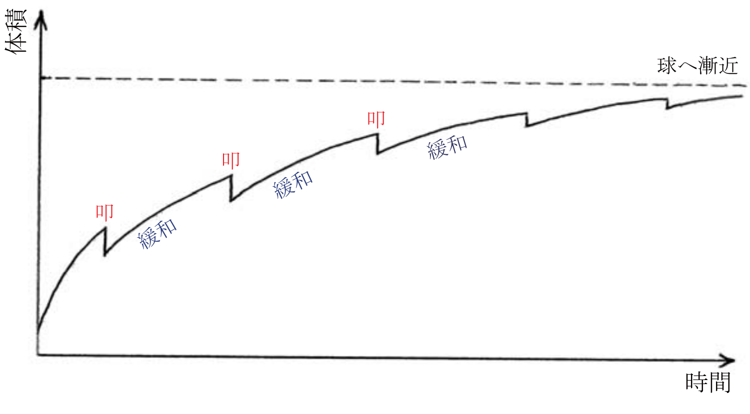
　　叩いた側はしわを増し、反対側は叩かれたいきおいで滑らさを増す。

　　つづいて上記の性質により、しわは少し緩和され、だいたい元のしわ具合に戻る。

結局サイクルごとに、叩いた側は元のしわ具合、反対側はより滑らかになり、
全体としてはしわが減る、丸まることになります。



1周期ごとになめらかさが加わる



よくある現象
―例えば乱流

大スケール
渦の

エネルギー

小スケール
渦の

cascade
（滝）

この世には、諸々のスケール（寸法）の部分現象が共存してなしている現象がみちあふれています。
有名な例は乱流：ありとあらゆるスケールの渦が入り乱れており

大スケールの渦は中スケールの渦へエネルギーを渡し、
中スケールの渦は小スケールの渦へエネルギーを渡し、・・・

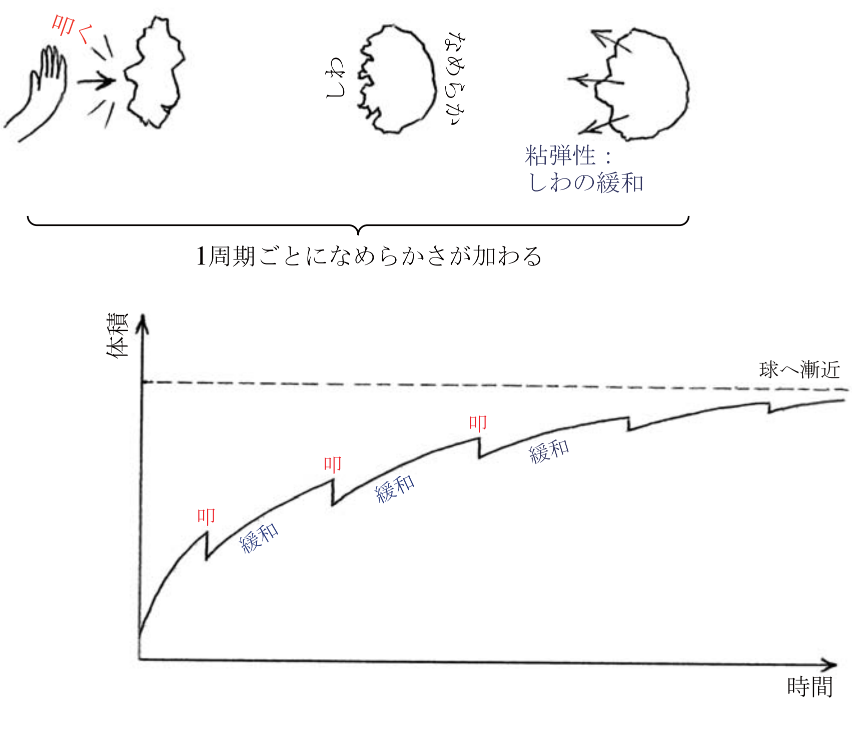
とスケール間のやりとり（cascade）が大から小へとおこなわれて平衡状態を保っています。

紙風船は普通とは逆。諸々のスケールのしわが混在しており、叩かれて丸まるにつれ

小スケールのしわは中スケールのしわへエネルギーを渡し、
中スケールのしわは大スケールのしわへエネルギーを渡し、・・・

小から大へ inverse cascade をおこなっているのです。

これまた新たな数理への入口です。



このおもちゃ

inverse cascade
（滝の逆登り？）

そろそろまとめの時間です。

この類いの講演をいたしますと
「むずかしい科学をやさしいおもちゃで伝えてくれる、教育によい」とかなんとか
評を賜ります。

教育によろしいならもうけものですが、
評の前半は私の趣旨とあべこべなことを、みなさまはお分かりになられたと希望します。
科学の殿堂を司るエライ科学者がシモジモの一般人に豆知識を開陳する、のではないのです。
科学は自然から出発し、自然へ回帰します。私たちは自然の中に生きているからには
生の現象へのアクセスは誰でもみな平等に、常にもっています。
そんな生の現象から、想像力・工夫を働かせ、科学の芽を見いだそう ──
それがおもちゃからの数理モデルの趣旨でした。

おもちゃで初めて遊んだときのの驚き、喜び、は玄人にとっても素人にとっても平等。
講演でごらんにいれたおもちゃは素人に喜んでいただけたのと同じく玄人にも驚きなのです。
（一旦現象を捉えれば玄人は素人より速く有機的に数理を構築できますが、
それは技術訓練のおかげであって別の話。学生さん、訓練にはげむと将来楽しいですよ。）
能動的な科学はまず現象に驚き、喜ぶところから始まります。

科学の芽は、遠くのフロンティアにあるのではなく、身近いたるところに息づいているのです。

私たちは数理の多様な主題にふれてきました：

chirality（対掌性）
次元解析
摩擦
相転移
特異摂動
有限時間発散
粘弾性
inverse cascade
・
・
・

なぜ「おもちゃ」か？

[アリストテレス *De partibus animalium* I 5.645a = DK 22A9 意訳]

どんな自然現象であれ何か不思議なことを秘しているものだ。

あるとき学生たちが碩学ヘラクリトスに面会に来た。

最先端研究所、複雑な実験装置、難解な専門誌、厳粛な講義、など想像して来たのに、
実際のヘラクリトスは
ちゃんちゃんこを着て暖炉にあたり、小さな子と遊んでいたので
学生たちは戸口でためらった。

しかしヘラクリトスは言った：「お入り、お入り、怪しむことはない——
こんなところにも神々は宿るのさ」と。

εἶναι γὰρ καὶ ἐνταῦθα θεούς

聴衆の方々

+

日本数学会
舟木直久・松本幸夫・川崎徹郎・山田澄生 各位

に感謝いたします

正