

見えない数?! 複素数の世界で絵を描こう!

「女子中高生夏の学校 2014 ～科学・技術・人との出会い～」の参加記録

藤村 雅代

防衛大学校 数学教育室

1 女子中高生夏の学校

「女子中高生夏の学校 2014～科学・技術・人との出会い～」(以下夏学と略します)は独立行政法人科学技術振興機構(JST)の「女子中高生の理系進路選択支援プログラム」の委託を受け、8月7日～9日に埼玉県比企郡嵐山町にある国立女性教育会館で開催されました。約120名の女子中高生と、「保護者・教員プログラム」に参加される保護者や中高の教員の方々、さらには各学会や団体から派遣された研究者たちが、武蔵丘陵の木々に囲まれた一角の静かな環境で2泊3日の合宿型の研修に参加しました。私は、今回が初参加でしたが、夏学は今年で10周年の節目を迎えたとのことで、新たな試みのイベントも行われました。

今回私は、8月8日の午前中の『サイエンスアドベンチャーI「ミニ科学者になろう!」』という2時間半の実験・実習を担当致しました。

以下は、実験・実習の内容と、その他のイベントへの参加記録です。

2 実験・実習

実験・実習は、進路を理系にするか文系にするか迷っている生徒向けの「不思議体験コース」と専門性の高い「チャレンジコース」の2種類があり、各学会・団体から16の実験・実習が開講されました。数学会からは、清水理佳先生(群馬高専)とTAの森下奈保子さん(お茶の水女子大)による「結び目のゲームを作って遊ぼう」と、私藤村とTAの清水一那さん(埼玉大学大学院)による「見えない数?! 複素数の世界で絵を描こう!」の2件の実験・実習を開講しました。

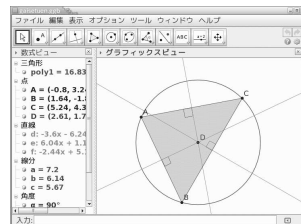
2.1 実習プリントの抜粋

2.1.1 Geogebra について

今日の実験・実習では GeoGebra を使った作図を行います。GeoGebra は、幾何、代数、解析を1つに結びつけた動的数学ソフトウェアで、フリーソフトウェア (GNU GPL) です。リンツ大学の Hohenwarter 氏を中心とするグループにより開発が進められています。

タブレット版, Windows 版, Mac 版, Linux 版があり, 下記のサイトからダウンロードできます。

GeoGebra



<http://www.geogebra.org/cms/ja/download/>

2.1.2 用語の説明 (複素数と複素平面)

虚数・複素数

虚数単位 i は, $i^2 = -1$ をみたす数です. a と b を実数とすると, $a + bi$ の形の数を複素数と呼びます. また, a を実数部分, b を虚数部分と呼びます.

例 1 $1 + 2i$ や $-5 + \sqrt{2}i$ のような数が複素数です.

うんちく

方程式を解くときに (たとえば $x^2 + 3 = 0$ のような) 負の数の平方根が現れることに数学者が気が付いたのは 16 世紀のことでした. でも, i のような数は『ありえない』と考えて, **imaginary number** (日本語で虚数) と名づけました.

18 世紀後半になると複素数はむしろ自然なものとして扱われるようになっていきました.

課題 1 次の式を $a + bi$ の形に変形しましょう.

1. $(1 + 2i) + (3 + 4i)$, 2. $i(1 + 2i)$, 3. $\frac{1}{i}$

複素平面

複素数は, 実数部分を x -軸方向に (実軸と呼びます), 虚数部分を y -軸方向に (虚軸と呼びます) とすることで, 平面上の点として表すことができます. このような平面を**複素平面**と呼びます.

課題 2 3, 3i, -1 - i, $\sqrt{5} + 2i$ を複素平面上に表しましょう。

記号

複素数 $z = x + iy$ に対して、次のように定めます。

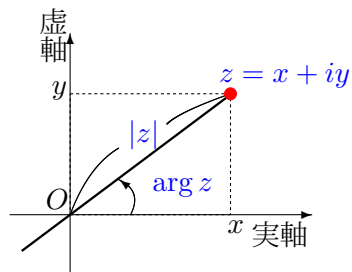
実数部分: $\operatorname{Re} z = x$

虚数部分: $\operatorname{Im} z = y$

絶対値: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ($|z|^2 = z\bar{z}$ が成り立つ)

偏角: $\arg z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

共役複素数: $\bar{z} = x - iy$



課題 3

1. $z = -2 + i$ のとき $\operatorname{Re} z$ と $\operatorname{Im} z$ は?
2. $z = 1 + i$ のとき $|z|$ は?
3. $z = 2 - 3i$ のとき \bar{z} は?

例題 (本紙面では省略) にもあるように、絶対値 $|z|$ は、原点から点 z までの長さを表します。このことをふまえると、複素平面上で、方程式 $|z| = 1$ は単位円周 (中心が 0 で、半径が 1 の円) を表すことが分かります。

2.1.3 単位円周上の関数

これから、単位円周上の関数

$$w = f(z) = t \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (|t| = 1)$$

を考えます。ただし、 t と a は複素数で、 t は $|t| = 1$ をみたす値とします。

気になるアナタに

$f(z)$ は単位円周上の点を単位円周上の点に写すか?

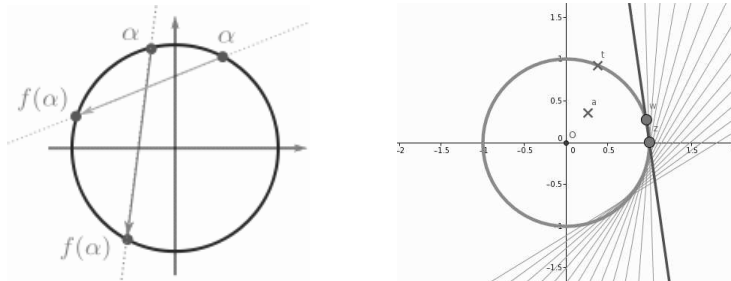
$|z| = 1$ のとき、 $|w| = 1$ となることは次のようにチェックできます。

$$|w| = \left| t \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = |t| \cdot \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} \stackrel{(\#)}{=} \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}\frac{1}{\bar{z}}|} = |z| \frac{|z - a|}{|\bar{z} - \bar{a}|} \stackrel{(*)}{=} 1$$

(#) では $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ と $|t| = 1$ を、(*) では $|z| = 1$ と $|\alpha| = |\bar{\alpha}|$ の性質を使っています。

いよいよ、GeoGebra の登場です！

点 α が円周上を動くとき、 $f(\alpha)$ も円周上を動きます。 α と $f(\alpha)$ を結ぶ直線はどのような動きをするのでしょうか？ GeoGebra から `frantz.ggb`¹を開いて動きを見てみましょう。

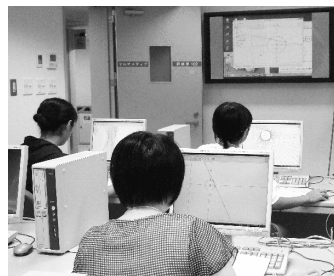


t や a の値を変えると直線の動きはどう変化するのでしょうか？ α と $f(\alpha)$ を結ぶ直線を残像として残すと、どのようなになるのでしょうか？

気になるアナタに

単位円周上の 2 点 z_1 と z_2 を結ぶ直線の方程式は、
 $z + z_1 z_2 \bar{z} = z_1 + z_2$ で与えられます。

課題 4 上の右の図のように、直線の残像を描いたとき、どのような図形が現れるのでしょうか？ 現れた図形の名称を答えましょう。また、それらの図形は、 t や a がどのような位置にあるときに現れるのでしょうか？ 予想をたてましょう。²



実習風景

課題 5 関数を

$$w = f(z) = tz^n \quad (|t| = 1, n = 1, 2, 3, \dots)$$

に変えて、同じような作図を試みてみましょう。直線の動きはどうなるのでしょうか？ (n の値によってどのように変化しますか？)

直線の残像を描いたとき、どのような図形が現れるのでしょうか？ (n の値によってどのように変化しますか？) GeoGebra から `frantz-cyc.ggb` を開いて実験してみましょう。³

¹ポータブル版 GeoGebra および、各種ファイル類の入った USB メモリは全員に配布済みです。

² a が円の内部か、外部かで状況が変わることはみんなすぐに気がついたようです。 $t = -1$ のときに“退化”することに気がついた人もいました（実は、前半で睡眠状態になっていた生徒です）。

³カスパという用語を知らないのので、いろいろな表現をしてくれましたが、全員が正解にたどり着きました。

2.1.4 たねあかしなど

【包絡線】 ちょっと難しい話になりますが… 今回の例のように、直線をたくさん描くことで『見えてきた』曲線を包絡線と言います。

包絡線

xy -平面上のパラメータ α を含む曲線の族 (集合と思って可) $F = \{f_\alpha(x, y) = 0\}$ に対して、ある曲線 C が F の各曲線に接していて、しかもその接点の軌跡として表されるとき、 C を曲線族 F の包絡線 (ほうらくせん) という。

【Frantz の問題】 今回の話のネタは Frantz [1] が 2004 年に発表した結果 (結構新しいんです!) を元にしてあります。Frantz は次の定理を示しています。ただし、 $e^{i\theta}$ は単位円周上で偏角が θ の点を表します。

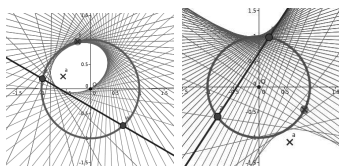
定理 $M(z) = -e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ($|a| \neq 1$) に対して、単位円周上の点 w と $M(w)$ を結ぶ直線は

- $|a| < 1$ のとき、楕円 $|z-a| + |z-e^{i\theta}a| = |e^{i\theta}-1|$,
- $|a| > 1$ のとき、双曲線 $|z-a| - |z-e^{i\theta}a| = \pm|e^{i\theta}-1|$,

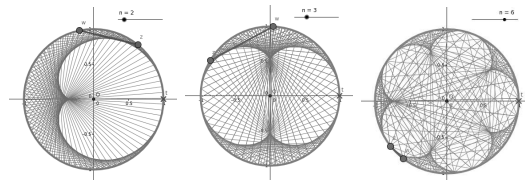
に接する。ただし、 $\theta=0$ のとき 2 次曲線は退化し w と $M(w)$ を結ぶ直線は定点 a を通る。

描画例

課題 4



課題 5



気になるアナタに

1. 上の定理の中で

$$|z - p| + |z - q| = r \quad (r > 0)$$

の形の式があります。これは複素平面上での楕円の方程式です。『点 z は焦点 p と q からの距離の和が、一定値 (r) となる点です。』と読み取ります。

そうすると、定理の中のもう一つの式 $|z - p| - |z - q| = \pm r$ ($r > 0$) はどう読み取ればいいのか、もうわかりますね？

2. 定理の中の条件 $|a| \neq 1$ は、なぜ必要なのでしょう。

もし、 $|a| = 1$ のときは、 $a\bar{a} = 1$ が成り立つので、

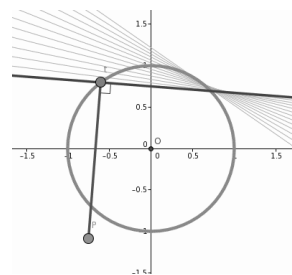
$$f(z) = t \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = t \frac{z - a}{1 - \frac{1}{z}} = at \frac{z - a}{a - z} = -at$$

となり、関数 $f(z)$ は定数関数になってしまうのです。

xy -平面上で、次のような古典的な性質が知られています ([2] 参照) :

円 C と定点 A があります。 C 上の点 P と A を結ぶ線分 AP の P を通る垂線を ℓ_P とします。このとき、直線族 $\{\ell_P\}$ の包絡線は、

- 定点 A が C の内側にあるとき、楕円になり、
- 定点 A が C の外側にあるとき、双曲線になる。



GeoGebra (`chokkou.ggb`) で上の性質を確認しましょう。⁴ 実は、Frantz の結果は、この古典的な性質の一般化 (直交でなく任意の角にした) になっています。

【エピサイクロイド】 課題 5 で描いた曲線はエピサイクロイド (外サイクロイド) と呼ばれる曲線です。 xy -平面での標準的な描き方は `epicyc-rot.ggb` で確認できます。また、これらの曲線は次のようにパラメータ表示できます。

$$x = \frac{N+1}{N} \cos \theta - \frac{1}{N} \cos(N+1)\theta, \quad y = \frac{N+1}{N} \sin \theta - \frac{1}{N} \sin(N+1)\theta \quad (N = 1, 2, \dots).$$

$N = 1$ のときカージオイド、 $N = 2$ のときネフロイドになります。

課題 5 で描いた曲線の方程式は、 t の偏角を ϕ とおいたとき

$$z = \frac{1}{n+1} \{n \cos \theta + \cos(\phi + n\theta) + i(n \sin \theta + \sin(\phi + n\theta))\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

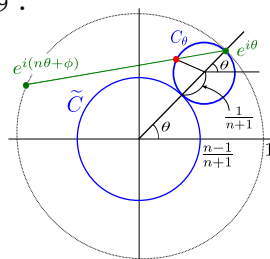
で表されます。

⁴このあたりまで来ると、前で例示しなくても自主的に作業を進められるようになりました。

$n = 2$ のときカージオイド, $n = 3$ のときネフロイドになります.

気になるアナタに

方程式 (1) は, $\alpha = e^{i\theta}$ と $e^{i\phi} e^{in\theta}$ を結ぶ直線と, 中心が $\frac{n}{n+1} e^{i\theta}$ で半径が $\frac{1}{n+1}$ の円の交点の軌跡と一致します.



【カージオイド】 エピサイクロイドは, 歯車の設計など生活のいろいろな場面で現れます. 特に, カージオイドはすでに皆さんもどこかで目しているかもしれません.

ここでは, 二つの例を見ましょう.

円周上の一点から円内に放たれた光線は, 反射して…その後どうなるでしょう?

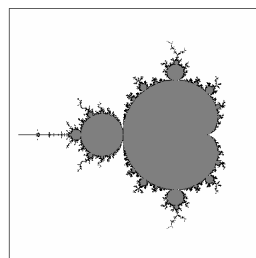
hansha-cardioid.ggb を使ってシミュレーションしてみましょう.⁵



コップを使った反射実験

右の絵は, マンデルブロー集合と呼ばれるものです.

マンデルブロー集合は 1980 年 B. B. Mandelbrot によってはじめて描かれた集合です. 以来研究対象としてはもちろん, 細部の美しさからアートの対象としても扱われています. 描き方は非常に簡単で, 次のような数学的設定によって作図できます.⁶



まず, 複素数のパラメータ c をもつ 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ を考えます. ここで初期値 $z = 0$ として $f_c(z)$ の反復を行うと次のような複素数の数列ができます.

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots \quad (2)$$

この数列が『発散しないような』 c の点の集合 M をマンデルブロー集合と呼びます. ここでの『発散しない』ということは, 必ずしも収束すると言う意味ではないことに注意しましょう.

さて, 上のマンデルブロー集合の中にカージオイドが見えませんか? じつは, このカージオイドは数列 (2) がある一つの値に収束する (振動したりしない) ような c の集合に一致します. 何だか不思議でしょう?

⁵あまりに, 今までの包絡線になれすぎて, 「アニメーションボタンがないっ!」と言う生徒も… また, 実際にコップにジュースを入れて光を当ててカージオイドが見えることを確認しました.

⁶ここでは, GNU XaoS (<http://matek.hu/xaos/doku.php>) を使用しました.

2.1.5 最後に

今回は、日本数学会の実験・実習に参加していただきまして、どうもありがとうございました。

数学は『科学・技術の公用語』です。みなさんが、今後どの分野に進んでも数学の知識は必要です。ぜひ、これからも数学に興味を持ちつづけてください。⁷

参考文献

- [1] M. Frantz, How conics govern Möbius transformations, *Amer. Math. Monthly*, **111** (2004), 779–790.
- [2] 磯田 正美, M. G. Bartolini Bussi, 曲線の事典 性質・歴史・作図法, 共立出版, (2009).

(実習プリントはここまでです。)

2.2 実習の顛末

この実験・実習の参加者は女子中高生7名のみ(中高の教員の参加希望なし)との事前連絡がありました。が、実際に始めようとしたところ、会場となったマルチメディア教室のうしろ半分に10名以上の“大人”の方々がおり、時間とともに参加者は増減を繰り返しました。その後も、見学のみのはずの教員の方が実習に参加するなど想定外のことが次々起こりましたが、小磯深幸先生(九大)が対応をしてくださり、教室の前半分の実験・実習は滞りなく進めることができました。教室のうしろ半分で大人の夏学(?)を行っていた小磯先生、また、教室中まんべんなく気を配って対応してくれたTAの清水一那さん、本当に有難うございました。

実験・実習では、前半1時間ほどを複素平面の話に割きました(本紙面ではプリントの内容を一部省略しています)。受講生には既に複素平面を知っている高校生から、まだ複素数すら知らない中学生までいて、途中で(退屈で? ついていけなくて?)眠そうな生徒がちらほら。この先どうなるのかと心配をしていましたが、休憩時間をはさんで、後半のコンピュータ実習になった途端、別人のようにPCにかじりつく姿が見受けられ、胸をなで下ろしました。定義などをしっかり理解した上で問題に取り組んでもらいたかったのですが、理論の時間が冗長だったのかも知れません。今後の(再びこの様な話をする機会が得られれば)反省点です。

⁷受講者の皆さんには USB メモリを記念としてお持ち帰りいただきました。

3 その他のイベント

3.1 サイエンスアドベンチャー II 「研究者・技術者と話そう」ポスター展示

8月8日の午後には『サイエンスアドベンチャー II 「研究者・技術者と話そう」ポスター展示』という2時間45分のイベントがありました。このポスター展示では、中高生が面白かったと思うブースを一つ選んで投票をすることもあり、各学会・団体とも気合が入った展示を行っていて、会場は活気に満ちていました。

数学会からは大島和幸先生（愛知工大）、小磯先生、松井泰子先生（東海大）ご担当の「結び方と数学」の展示発表が行われ、展示ブースでは、大島先生と清水先生が中心となって訪れた中高生に個別に丁寧な解説がなされました。中高生達も、かなり真剣になって話を聞いていて、中にはポスターを写真に撮っていく人もいました。

ここで、真剣に話を聞いていた生徒のエピソードを一つお届けしましょう。ポスター展示の後、『Gate Way』という企画がありました。いろいろな専門ごとに分かれて、よろず相談事に答えるというもので、数学の研究者（数学会からのメンバー以外の人も加わりました）が、本館のロビーの一角の「数学屋の部屋」で相談を受けることになりました。そこに来た高校生の一人が、「父が数学の先生をしています。数学が分からないとき、教えてくれるんだけど、いつも『こんなことも分からないのか？』って言われるんです。さっき、結び方の数学の話聞いて“これだ！”って思ったんです。私、初めて父に数学の話で“アッ”と言わせることができます！」と、話してくれました。展示ブースでの話を100%理解したという達成感で、少しハイになっているようでした。この「わかった！」という気持ちをいつまでも忘れずにいてほしいと思います。

夕食の交流会で、中高生によるポスターの投票結果が発表になりました。大島先生の手による分かり易いポスターと丁寧な解説が実を結び、数学会は3位（！！）に食い込みました。

大掛かりな実験装置などを持ち込む学会や団体が多い中、一番地味（すみません個人の感想です）なオール手書きの数学の展示が36団体中の3位になったことは、快挙というべきものです。この勢いで、今後、数学に興味を持つ中高生が増えることを期待したいと思います。

3.2 一体感型実験

今年は夏学10周年にあたり、最終日の9日に新たな試みである『一体感型実験』が行われました。これは中高生・学生TA・教員スタッフが大会議室に一同に集まって一つの実験を行うというものです。ここでは、数学会からの夏学企画委員の柏原賢二先生（東大）が発案された「人間コンピュータ」が、初めての一体感型実験のテーマとして採用され、参

加者全員が一斉にビットになって足し算を行ったり、論理回路を作ったりすることになりました。

この実験の解答例をステージで実演するため、前日の夜に数学会からの参加者+他学会の有志の方々により準備が行われました。三角帽子を被ってビットになりきったり、紐でつながって論理回路になりきったりする姿は、まわりにいた他学会の方々の視線を浴びていました。



ポスター前にて：前列左から、清水先生、柏原先生、小磯先生、後列左から、TA 松下さん、大島先生、筆者（写真提供：小磯先生）



一体感型実験の準備風景
（窓に写る“ビット”に扮した数学会メンバーと他学会からの有志の方々）

当日の実験では、二桁の足し算を行う論理回路がすべてのチームで不正解になるなど、残念なこともありました。が、“計算機ってすごいね”という共通認識が生まれたところで時間切れとなりました。

実はこの頃、台風 11 号が四国に接近してきており、交通機関が乱れはじめていました。一体感型実験の後の 9 日のスケジュールは切り上げとなり、「2014 女子中高生夏の学校」は終了しました。

4 謝辞

今回、濱田龍義先生（福岡大）にコンピュータを使った実習をしてみませんかと声をかけていただき、夏学の実験・実習を担当することになりました。おかげで、たくさんの貴重な体験をすることができました。有難うございました。また、町原秀二先生（埼玉大）には、実験・実習の TA の清水一那さんを紹介していただきまして有難うございました。清水さんには、想定外のことが多かった実験・実習の要所々々において的確に対応していただき、大変心強かったです。

準備段階からいろいろと夏学について教えていただきました夏学企画委員でもある柏原先生、数学会のメンバーとして一緒に参加・活動を行った小磯先生、松井先生、大島先生、

清水先生，また，数学科（数学専攻）の学生として参加者たちの良き未来像となってくれた，実験 TA の松下さんと清水さん，宿泊 TA の善養寺未来さん（日大平田研究室），皆様方と一緒に活動を行うことが出来，有意義な 3 日間を過ごせましたことを感謝致します。

そのほか，独立行政法人国立女性教育会館のスタッフの皆様をはじめ，他学会から参加されている方など，さまざまな場面でたくさんの方にお世話になりました。関わったすべての方へ，感謝の言葉を述べたいと思います。

最後に，この記事執筆する機会をくださいました，徳永浩雄先生（首都大），小磯先生にもお礼を申し上げます。

夏学の会期中，他の学会から参加されているの方々とお話をする機会もありました。それによれば，日本数学会は夏学へのサポート体制が充実していて羨ましいとのことでした。今回はじめての参加でしたが，夏学は理系を目指す女子中高生にとっても，私たち学会側の参加者にとっても，貴重な交流の場になっていることを実感致しました。私は，一参加者にしか過ぎませんでしたが，今後とも日本数学会から，このサポート体制を維持していただけますよう，この紙面を借りてお願いする次第です。