パスカルの半平面

加藤　文元

前置き：「パスカルの半平面」は，拙著『数学する精神』（中公新書）の中で数学研究の典型的な思考過程を説明するための〈ひな形〉として述べたものでした（ですので，この手のことに興味ある方はそちらをご覧下さい）．市民講演会では数学的対象としての「パスカルの半平面」の説明と，それがどのような数学に繋がって行くのかという点のみを話させて頂きました．

1. パスカルの三角形

よく知られている「パスカルの三角形」から始めましょう．パスカルの三角形は図 1 のような数の三角形で，実際には下に無限に続いています．これは中心線に沿っ

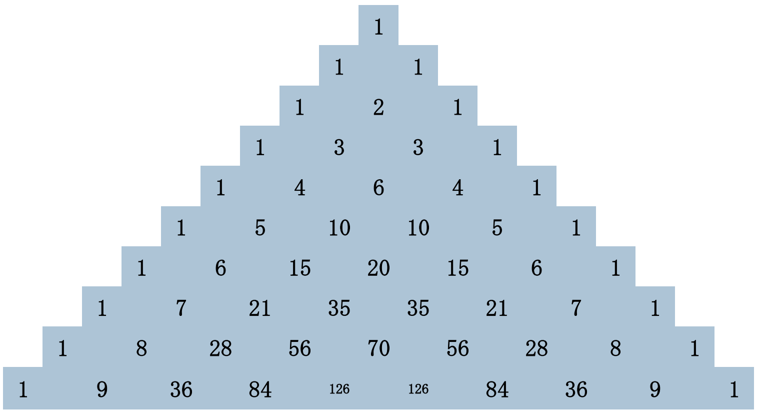

Figure 1. パスカルの三角形

て左右対称であり，左右両辺上には 1 がならんでいるなどの，すぐに目に見える特徴があります．他にも目に見える特徴は多くあります．例えば，左辺の 1 がならぶ列のすぐ隣りの列には，$1, 2, 3, \ldots$ と順に自然数がならびます．その隣りの列にならぶ $1, 3, 6, 10, \ldots$ という数列は，いわゆる「三角数」というものです．この数列の一般項 T_n は

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

で求められます．

パスカルの三角形はこの他にも多くの特徴的な性質があります．しかし，パスカルの三角形の最も重要な特徴は「となり合う 2 数の和がすぐ真下の数に等しい」というものです．これもよくご存知のことと思います．例えば，左から 2 列目に $1, 2, 3, \ldots$

2014 年度日本数学会年会市民講演会（2014 年 3 月 15 日）

がならぶことや，その隣りの3列目に三角数$1, 3, 6, 10, \ldots$がならぶことなどは，すべてこの単純な規則「となり合う2数の和がすぐ真下の数に等しい」からの帰結です．

この最も重要な原理から導かれる様々な特徴を，より系統的に調べてみることにしましょう．そのために，パスカルの三角形を冒頭の図1のような，普通によく知られている形から，図2に示したような形に変形して考えることにします．図2のよう

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Figure 2. パスカルの三角形

な書き方をすると，例えば図1では鮮やかだった左右対称性は見えにくくなります．しかし，この書き方の良いところは，各々の数に番号をふって座標付けることができることにあります．図2では縦軸と横軸に，それぞれ0以上の整数による座標がついていることに注意して下さい．いつものように横方向を行，縦方向を列と呼ぶことにしますと，縦にふられた番号は行の番号を表し，横にふられた番号は列の番号を表すことになります．例えば，【9行目3列目】の数は84です．一般に【r行目k列目】の数を

$$\binom{r}{k}$$

で表すことにします．この数は，よく知られているように

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

と明示的に書くことができます．さらに，これは「r個のものからk個選ぶ組み合わせ」の数であることもよくご存知のことと思います．

先に述べた「となり合う2数の和がすぐ真下の数に等しい」という原理は，ここでは図2に示したような〈テトリス形〉で考えることになります．上の2つの数の和が，その右下の数に等しくなるというわけです．これを先ほど導入した記号で表現しますと

$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}$$

ということになります．先に述べた「組み合わせ」の数として見るなら，この等式は次のように解釈できます．右辺は「$r+1$ 人の中から $k+1$ 人選ぶ」組み合わせの数です．これを選ばれる $k+1$ 人の中に自分が入っている場合と入っていない場合に分けて，それぞれ計算してたしたものが左辺ということになります．

2. ずらし算

「となり合う 2 数の和がすぐ真下の数に等しい」という〈テトリス則〉は，次のように言い換えることができます．例えば，図 2 の〈変形パスカル三角形〉の 6 行目を考えましょう．このすぐ下に，同じ 6 行目を今度は右に 1 マスずつずらして書きます．こうして得られた数のならびを見て，上下にある数をたし合わせて一番下に書きならべます．そうすると，一番下に得られるのはちょうど 7 行目です（図 3）．

6	1	6	15	20	15	6	1	
		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Figure 3. ずらし算

この計算は，要するに先に示した〈テトリス形〉に沿ったたし算を，行ごとに一度にやったものに他ならないということは，すぐにわかると思います．〈テトリス則〉という規則は，このように考えれば，各行の上のような〈ずらし算〉が次の行になる．そうして 0 行目（1 がひとつだけの行）から出発して，1 行目，2 行目…というように次々に得られるのだということを示しています．

ずらし算の考え方は多項式（整式）を用いると，さらに鮮やかに理解されます．そのために各行にならんだ数を，昇べきの順に書いた多項式の各次数の係数と考えます．0 列目の数は 0 次の係数，つまり定数項．1 列目の数は 1 次の係数…というふうにです．例えば，6 行目は $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$ という 6 次の多項式を表していると考えます．そうすると，今述べたずらし算は次のような多項式のたし算を表しているわけです（図 4）．

6	1	$+6x$	$+15x^2$	$+20x^3$	$+15x^4$	$+6x^5$	$+x^6$	
		x	$+6x^2$	$+15x^3$	$+20x^4$	$+15x^5$	$+6x^6$	$+x^7$
7	1	$+7x$	$+21x^2$	$+35x^3$	$+35x^4$	$+21x^5$	$+7x^6$	$+x^7$

Figure 4. ずらし算

ここで，この考えにおいて数のならびを右に 1 マスずらすというのは，対応する多項式に x をかけるということに他ならないことに注意して下さい．図 4 に示したように，このようにして 7 行目に対応する多項式が得られます．この計算が示していることは，つまり

$$【7\text{ 行目多項式}】=(1+x)\times【6\text{ 行目多項式}】$$

ということです．これを一般的に述べれば，

$$【r+1\text{ 行目多項式}】=(1+x)\times【r\text{ 行目多項式}】$$

ということになります．

ところで,【0 行目多項式】は定数 1 ですから,この規則を帰納的に適用すれば次の有名な二項定理が得られることになります.

二項定理. 自然数 r に対して

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k.$$

3. パスカルの三角形の復元

さて,図 2 の変形パスカル三角形を見ていると,一つ気になることがあります.ここで数は左下半分にならんでいますが,右上半分には何も数がありません.ここにはどんな数がならぶべきでしょうか.実は,この部分に書き込むべき数はすべて 0 です(図 5).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Figure 5. パスカルの三角形

その根拠は,明示公式

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

です.ここでパスカル三角形の右上部分の成分は $r < k$ である場合ですが,この場合は分子の因子に必ず 0 が入るので 0 となります.面白いことは,この拡張されたパスカル三角形(もはや三角形ではないが)でも,先の「となり合う 2 数の和がすぐ真下の数に等しい」が成り立っていることです.図 5 に示したように,どこにテトリスを置いても確かに成り立っています.

このように次数 k がどこまでも高い部分にまで数を考えるということは,多項式を「形式べき級数」の特別な場合と考えることに対応しています.つまり,【r 行目】を次のように形式べき級数として捉えるわけです:

$$【r \text{ 行目形式べき級数}】 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

先にも述べたように，$r < k$ なら k 次の係数は全部 0 になりますから，これは実際には多項式であるというわけです．

このようにパスカルの三角形を拡張することのご利益は他にもあります．まず，こうして改めて図 5 を眺めてみると，パスカルの三角形というのは第 0 列目（すべて 1 がならんでいる）と第 0 行目（最初以外は全部 0）を最初に設定すれば，後は全部〈テトリス則〉で自動的に決まるということがわかります．ということは，これらの初期設定をいろいろといじれば，他にも多くの「パスカル三角形もどき」ができるということにもなります．例えば，第 0 行目を少し変えて $1, a_1, a_2, \ldots$ というように文字で表してみます．こうして次々にテトリスをあてて行けば，次々に数が決まります（図 6）．

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
r=1	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
r=2	1	$2+a_1$				
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

Figure 6. パスカルの三角形の復元

こうして得られた「パスカル三角形もどき」においても，ずらし算の公式

$$【r+1\text{ 行目形式べき級数}】=(1+x)\times【r\text{ 行目形式べき級数}】$$

が成り立っています．ですから，帰納的に考えれば

$$【r\text{ 行目形式べき級数}】=(1+x)^r\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k\right)$$

となっているわけです．

4. パスカルの半平面

先ほどのようにパスカルの三角形を拡張したご利益は，実はそれだけではありません．実は先の〈テトリス則〉を逆手に用いて，パスカルの三角形を〈上に〉拡張していくことができます．つまり，今までは 0 行目，1 行目…と〈下に〉続いていた数のならびを，−1 行目，−2 行目…というように〈上に〉ならべていくわけです．

やってみましょう．−1 行目も最初の数は 1 から始まるということにします．つまり，0 列目には 1 がならぶという以前からの原則を，ここでも素直に踏襲するわけです．そうすると，そのすぐ右隣りの数，−1 行目の 1 列目の数は〈テトリス則〉によれ

ば「1 にその数をたしたら 0 になる」数ということになります．ですから，ここには -1 がくるべきです．次の数はどうでしょうか．ここには「-1 にその数をたしたら 0 になる」数，つまり -1 がきます．これを繰り返していけば，-1 行目には 1 と -1 が交互にならぶことがわかります（図 7）．

-1	1	-1	1	-1	1	
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

Figure 7. -1 行目

同様にしていけば，-2 行目や -3 行目も次々に決めていくことができます（図 8）．

-3	1	-3	6	-10	15	-21
-2	1	-2	3	-4	5	-6
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

Figure 8. -3 行目まで

こうしてパスカルの三角形から出発して，右半平面上にくまなく数がならんだ図式を得ることができました（図 9）．これが私が「パスカルの半平面」と普段から呼んでいるものです．

まずはこの数のならびを眺めてみて下さい．ここには最初のパスカルの三角形に見られた様々な対称性が隠れています．例えば，上半分と左下部分は符号の違いを除くと対称的になっています．-2 行目は $1, 2, 3, \ldots$ に符号を互い違いにつけたものに

−6	1	−6	21	−56	126	−252	462	−792	1287
−5	1	−5	15	−35	70	−126	210	−330	495
−4	1	−4	10	−20	35	−56	84	−120	165
−3	1	−3	6	−10	15	−21	28	−36	45
−2	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0

Figure 9. パスカルの半平面

なっていますから，これは左下部分の 1 列目に対応します．また，-3 行目は三角数列に交互に符号をふったものです．ですから，これは左下部分の 2 列目に対応しているわけです．

実はこれは単なる数遊びに過ぎないものではありません．いろいろと数学的な背景がある現象です．というのも，これらの〈新しい〉数もまた，二項係数の明示公式

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

で得られるものだからです．例えば，上の公式で $r = -1, -2$ とします．そうすると，

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$$
$$\binom{-2}{k} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdots(-k-1)}{k!} = (-1)^k(k+1)$$

となって，ちゃんとこれらの行が出てきます．二項係数の明示公式の右辺の r には，自然数ばかりでなく，どんな数でも代入できることに注意して下さい．

まだあります．これらの数のならびはすべての場所で〈テトリス則〉を満たします．というより，そうなるように作ったのでした．ですから，先に述べた各行に関する「ずらし算」の原理を応用することができるのです．ここで「ずらし算」の原理とは

$$\text{行が進む} \iff (1+x)\ \text{をかける}$$

というものでしたから，例えば【-1 行目形式べき級数】に $(1+x)$ をかけたものは【0 行目形式べき級数】，つまり 1 になる．ということは，【-1 行目形式べき級数】は $(1+x)^{-1}$ の展開を与えているということになるわけです：

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \cdots$$
$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \cdots.$$

これを帰納的に考えていけば，【$-r$ 行目形式べき級数】は $(1+x)^{-r}$ を与えていることになります．つまり，先の二項定理

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

は，r が負の整数である場合も「正しい」ことになるのです．これは左辺の有理関数 $(1+x)^r$（$x=0$ のまわりで正則）の Taylor 展開を与えていることになります．

5. その変種

ここで図 10 を見て下さい．これもパスカル半平面らしき数のならびの形をしていますが，ならんでいる数はずいぶん違っています．そもそも，それらはもはや整数ではありません．のみならず，行番号も「2 分の整数」という形をしています．これ

−5/2	1	−5/2	35/8	−105/16	1155/128	−3003/256
−3/2	1	−3/2	15/8	−35/16	315/128	−693/256
−1/2	1	−1/2	3/8	−5/16	35/128	−63/256
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	−3/256
5/2	1	5/2	15/8	5/16	−5/128	3/256
7/2	1	7/2	35/8	35/16	35/128	−7/256

Figure 10. 半整数パスカル半平面

は一体なんなのかと申しますと，私が「半整数パスカル半平面」とでも呼んでいる代物です．これは先に述べた「パスカル三角形の復元」で $a_1 = 1/2$，$a_2 = 3/8 \cdots$ などと置いて作ったものとも言えるのですが，これらの数にはもちろん理由があります．具体的には，先の明示公式の r に $r = 1/2$ などの半整数を代入して得られます：

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}.$$

先に「二項係数の明示公式の右辺の r にはどんな数でも代入できる」と述べたことを思い出して下さい．例えば，

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$$

です．ここで $(2k-1)!!$ という二回びっくりするような記号は，$(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 1$ のように「2 とび」で数を減じてかけていくというものです．図 10 にも示したように，この半整数パスカル半平面でもちゃんと〈テトリス則〉がどこでも成り立っています．

ここでは半整数（2 分の整数という形の分数）についてのみ変種版パスカル半平面を述べましたが，もちろんこの手のことはすべての自然数 m について「m 分の整

数」でも同様に論じることができます．パスカルの半平面が単なる数遊びではなかったのと同様に，これらの変種もちゃんと数学的な背景を有します．実際，次ような拡張版二項定理が成立するからです：

二項定理．任意の〈数〉（有理数，実数，複素数など）r について

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

ただし，r をこのようにいろんな数にしてしまうと，等式の解釈は難しくなります．厳密には，左辺の解釈は文脈の影響を受けます．例えば，複素解析関数として左辺を捉えるなら，これは左辺という解析関数の $x=0$ で 1 という値をとる分枝の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開が右辺で与えられる，と読めることになります．

6. 応用

$r=-\frac{1}{2}$ の場合の二項定理を使うと，例えば円周率 π を計算することができます．単位円の第一象限部分 $y=\sqrt{1-x^2}$ の弧長を $x=0$ から $x=1/2$ まで求めると，これは中心角 $\pi/6$ の円弧ですから，それを 6 倍すれば π になります：

$$\pi = 6\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2}\,dx = 6\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

これを $r=-\frac{1}{2}$ の場合の二項展開を用いて計算してしまおうというわけです．

$$\begin{aligned}\pi &= 6\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k\right] dx = 6\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k}dx \\ &= 6\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!(2k+1)}.\end{aligned}$$

ここで二番目の「=」では積分と無限和が交換されていますが，これはもちろん自明なことではありません．ちょっと難しい解析の技法を用いています．最後の無限和を実際に計算してみますと

$$\begin{aligned}\pi &= 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} + \frac{35}{98304} + \frac{189}{2883584} + \cdots \\ &= 3 \\ &+ 0.125 \\ &+ 0.0140625\ldots \\ &+ 0.0020926\ldots \\ &+ 0.0003560\ldots \\ &+ 0.0000655\cdots \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

となって，現実に $3.141592\ldots$ に収束している様子が実感されると思います．

次の応用を見るためには「p 進数」という概念が必要です．p を素数として，形式的な（無限）p 進展開

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$$

（ただし各 $k = 0, 1, 2, \ldots$ について $a_k = 0, 1, \ldots, p-1$）を p 進整数と呼びます．これは言わば〈無限桁〉の p 進展開なのですが，普通の数のように計算できるものです．p 進整数や，これに p の負べきの項も有限個認めた p 進数という概念は，整数論などの数学の多くの分野で重要な概念です．

この p 進数という体系の中で -1 の平方根を求めるということをやってみましょう．これは p が 4 で割って 1 余る形の奇素数ならいつでも可能です．このとき，

$$p = a^2 + b^2$$

となる自然数 a, b をとることができます．ここで a も b も p で割れません．そこで，両辺を b^2 で割って

$$-1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{p}{b^2}.$$

とします．形式的には右辺の平方根をとればよいわけです．a も b も p で割れないので二項展開

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(-\frac{p}{a^2} \right)^k$$

は p 進数として収束します．よって，

$$\pm \frac{a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(-\frac{p}{a^2} \right)^k$$

が求めるものということになります．例えば，$p = 5$ のとき $5 = 1^2 + 2^2$ がとれるので

$$\pm \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-5)^k.$$

が -1 の平方根です．ここでは $x^2 + 1 = 0$ という形の 2 次方程式を二項展開で求めたわけですが，一般の 2 次方程式の解も，二項展開を応用して解くことができます．

7. 最後に

パスカルの半平面やその変種は「ずらし算」のような初等的で簡単な規則に基づいた数のならびです．しかし，これを系統的に調べることで二項定理という定理のより深い意味合いが明らかになったと思います．これはべき関数を始めとした様々な陰関数の Taylor 展開の係数を与えているわけです．そして，これらの関数にまつわる数論的・関数論的に興味深い〈数〉の値を計算する道具に使うこともできます．その値は実数・複素数値のみならず，p 進数値をも考えることができます．その意味で，これは数論・代数・解析などにまたがる領域横断的な普遍性を持っているとも言えると思います．

熊本大学大学院自然科学研究科理学専攻，〒 860-8555 熊本市中央区黒髪 2 丁目 39 番 1 号
E-mail address: kato@sci.kumamoto-u.ac.jp