書　評
数理解析のパイオニアたち

V.I. アーノルド 著　蟹江 幸博 訳

丸善出版　シュプリンガー数学クラブ (2012 年 7 月)

北海道大学理学研究院数学部門
石川 剛郎

この本は，1999 年 7 月にシュプリンガー・ジャパン株式会社より出版された同名書籍を再出版したものである．以前の本が出版された当時，評者はすぐに読んで感銘を受け，当時，書評を書いている [8]．それから 15 年程経過した今，数学通信の編集委員会から書評の機会を頂いて，改めて熟読した．もちろん 15 年前と感じる想いは随分変わっているが，やはり深い感銘を受けた．残念ながら，著者のウラディーミル・イーゴレヴィッチ・アーノルドさんは，4 年前，2010 年 6 月 3 日，逝去されている．享年 72 歳．ヒルベルト第 13 問題の解決，KAM 理論，特異点理論，実代数幾何学，シンプレックティック位相幾何学などで，数多くの業績を残している．『古典力学の数学的方法』（[1]）をはじめとして名著多数．わが敬愛する数学者である．改めて書評が書けることは喜びである．

「何を一番に褒め称えるべきだろうか．諸概念の発展に対する心理的な理解か，数学的推論の確かさか，物理的洞察の深さか. . . 」（[10] p. 213）これは，アインシュタインがパウリの相対性理論に関する著作について述べた言葉であるが，そのまま，アーノルドの著作についてもあてはまる，と書いてしまうと，評者をアインシュタインの立場に置くという意味であまりに不遜に過ぎるであろう．しかし，アーノルドの著作の評価として，このアインシュタインの言葉をまねることができる．「何を一番に褒め称えるべきだろうか．数学の発展に対する深い理解か，数学的構成のスケールの大きさか，物理的動機付けの確かさか. . . 」ただし，アーノルドのこの本では，相対性理論ではなく，量子論でもなく，あくまで，数理解析とニュートン力学から始まる古典力学の勝利が語られている．

本書の「はじめに」において，数理解析のパイオニアとして，4 人の名前が特に挙げられている．ホイヘンス (1629–1695)，バロー (1630–1677)，ニュートン (1642–1727) とフック (1635–1702) である．この 4 人は，本書の英語版（[3]）では書名になっている．

第 1 章は「万有引力」．ニュートンとフックの物語である．フックは，「フックの法則」に名を残しているが，その他の多くの発見をした．顕微鏡を改良して，植物の細胞構造を最初に発見した．生物学者レーウェンフークの名前が出てくる．評者は，レーウェンフークの名前から，画家フェルメールや哲学者スピノザを連想し，スピノザからライプニッツを連想し，ライプニッツから，結局ニュートンまで連想してしまった．それはともかく，

光の理論からフックとニュートンは衝突した．フックは万有引力の法則，逆 2 乗の法則を最初に発見したと主張した．ニュートンは『プリンキピア』（[9] 参照）の中で，当初はフックの名前に言及しなかったが，共通の友人ハリーの説得で，「レンとフックとハリーが独立に述べているように」逆 2 乗の法則はケプラーの第 3 法則に対応している，と書いた．レンはフックと共に 1666 年のロンドン大火後の復興を行い，たとえば再建されたセント・ポール大聖堂を設計した建築家である．また，ハリー彗星を発見したハリーは『プリンキピア』の出版に尽力した．ちなみに，ケプラーの法則とは，第 1 法則：「惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く.」第 2 法則：「惑星と太陽を結ぶ線分の描く面積速度は一定である.」第 3 法則：「惑星の周期 T と楕円軌道の長半径 a について，T^2/a^3 は惑星に依らない.」というものである．ニュートンが『プリンキピア』の中で示したように，ケプラーの第 1 法則は，万有引力の逆 2 乗の法則を導き，逆 2 乗の法則は，軌道が円錐曲線（楕円，双曲線，放物線）になることを導く．附録 1 にアーノルドによる簡潔な証明が与えられている．ケプラーの第 2 法則は中心力であることだけから導かれ，ケプラーの第 3 法則は逆 2 乗の法則から従う．ニュートンの考える数学者と物理学者の違い，ニュートンは軌道が楕円であることを厳密に証明したと言えるか言えないか，など興味深い話が語られる．以下の章においてもそうであるが，アーノルドの数学観が随所に明確に現れる．

第 2 章は「数理解析」．バローとニュートンの物語である．ニュートンはベキ級数による解析学を展開した．「ニュートンは解析学を，無限級数による方程式の研究と考えていた (p. 28).」彼は，微分方程式だけでなく代数方程式も「ニュートン多角形」や「ピュイズー展開」を使って解いた．解析学の始まりとしてバローが語られる．バローはニュートンの師でありケンブリッジ大学での前任者である．バローの先駆的業績が語られる．積分と微分の関係は，既にバローによって知られていた．では，ニュートンの主要な数学的発見は何か．「ニュートンは，数理解析の主要な道具であるテイラー級数を発明したのである (p. 36).」テイラー級数に名を残すテイラーはニュートンの学生である．そして，ライプニッツが登場する．ニュートンは 1666 年までには微分法（流率法）の基本構想を持っていた ([9]) が，公表していない．ライプニッツは無限小解析の論文を 1684 年に公表した．ご存知のように，現代の微積分学の教育はみなライプニッツ流でなされる．「ライプニッツは，今我々が知っている形の形式的な解析学を極めて短時間に展開した．(p. 42)」微分積分学は誰が作ったのか．ライプニッツなのかニュートンなのか．有名な論争が少し詳細に書かれている．「これが明らか示していることは，人は決してこの種の論争に加わるべきでないということである (p. 45).」アーノルドはライプニッツの数学に批判的である．なお，ライプニッツについては，哲学者スピノザとの関係を描いた本 [11] も興味深い．

第 3 章は「伸開線から準結晶へ」．ホイヘンスの物語である．「光の波動説」のホイヘンスと「光の粒子説」のニュートンの対比は有名であるが，アーノルドは別の切り口で語る．ホイヘンスは，ニュートンと同時代に，独立に，ある意味でニュートンを凌駕する研究を残している．「はじめに」に既に書いてあるように，「ホイヘンスの数学上の発見は，奇妙な運命をたどることになる．（中略）これらの結果は今や，シンプレクティック幾何学，変分法，最適制御，特異点理論，カタストロフ理論などの形で，科学の一分野になっている．」ここでは，ホイヘンスの研究と現代の特異点論の関係が述べられる．伸開線 (evolvent, involute) や縮閉線 (evolute) は，ホイヘンスの原理，波面の幾何学，に自然に現れる．ホイヘンスは，それらの特異性について詳しく認識していた．近年，シェルバックによって発見された平面曲線の伸開線や空間曲線の接線曲面の特異点と正 20 面体群 H_3 の特異軌道との関係が語られる．（詳細については [2] や [1] の第 2 版などを参照のこと．）さらに，準結晶との関係が詳しく語られる．これらは現代の応用特異点論や表現論と関わる物語であり，現在も大きく進展している内容である．

第 4 章は「天体力学」．ニュートンの解析学と力学の勝利の物語である．ニュートンの自然哲学，天体力学の勝利，ラプラスの安定性定理，月は地球に落ちてくるか？，3 体問題，ティティウス・ボーデ則と小惑星，間隙と共鳴，という具合に，アーノルドの面目躍如，ポアンカレから始まるカオス理論との関係まで一気に述べられている．（関連して [5] も参照のこと．）思えば，現代物理学の発展が，結局はニュートン力学に基づいているということは明白であり，相対論・量子論の数学が，ニュートンが作った微積分学，その発展形としての解析力学を基礎としていることは驚くべきことである．以前，アーノルドの『古典力学の数学的方法』を読み，古典力学・解析力学に関わる数学の流れを学んで，評者は思わず「ニュートンがラグランジュからハミルトン」という句を詠んだ．この解析力学を源の 1 つとするシンプレクティック幾何学や接触幾何学はアーノルドの数学の重要なテーマであった．『古典力学の数学的方法』([1]) の第 2 版では，シンプレクティック・接触特異点論の新たな結果やシンプレクティック位相幾何の文献などが補われている．なお，エクランドの著作 ([6][7]) も，ケプラーやニュートンの業績とカタストロフ理論，カオス理論の関係や，シンプレクティック幾何学と変分法・最適制御との関係について，アーノルドとは異なる観点から書かれていて参考になる．

第 5 章は「ケプラーの第 2 法則とアーベル積分のトポロジー」．ケプラーの第 2 法則と関連して，次のような問題を考える：平面上に代数的な卵形線を置き，内部を通る直線と卵形線で囲まれる図形の面積を考える．このとき，面積は，直線の空間の上の代数関数になる？ 代数的に可積分か？ ニュートンは『プリンキピア』の補題 28 でトポロジー的発想によって，代数的に可積分ではないことを証明している．現代的な言葉では「あらゆる

代数的に積分可能な卵形線は特異点を持つ．言い換えると，すべての滑らかな卵形線は代数的に積分可能ではない (p. 87)」となる．この定理の発想の斬新さにアーノルドは気づいた．ニュートンの定理は，分岐積分の理論，いわゆるピカール・レフシェッツ理論の応用として，アーノルド門下の秀才ヴァシリェフによって一般化されている（[4][12] を参照のこと）．附録 2 では，プリンキピア補題 28 の原文に関する解説が与えられ，関連して，ライプニッツがホイヘンスへの手紙の中で示唆したアーベル積分の値の超越性に関する予想が述べられている．

蟹江幸博さんによる丁寧で心のこもった訳と詳細な訳注，さらに（英語版にはない）人名索引，年表，肖像画は内容の理解を非常に助けてくれる．

本書に一貫して流れ溢れているのは，著者アーノルドの数学の矜持，そして数学をすることの喜びである．この本を再読して，数学をする元気がまた湧いてきた．

参考文献

[1] V.I. アーノルド『古典力学の数学的方法』 安藤 韶一, 蟹江 幸博, 丹羽 敏雄訳，岩波書店 (1980)．V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* 2nd ed. Springer-Verlag (1989).

[2] V.I. アーノルド『カタストロフ理論』蟹江 幸博訳，現代数学社 (1985)．V.I. Arnold, *Catastrophe Theory*, Transl, by G.S. Wassermann, R.K. Thomas, 3rd ed. Springer-Verlag (1992).

[3] V.I, Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals,* Transl. from Russian by E.J. Primrose. Birkhäuser Verlag (1990).

[4] V.I. Arnol'd, V.V. Goryunov, O.V. Lyashko, V.A. Vasil'ev, *Singularity Theory II, Application,* Encyclopaedia of Math. Sci., **39**, Dynamical Systems VIII, ed. by V.I. Arnol'd (1989), English transl. by J.S. Joel. Springer-Verlag (1993). Chapter 4.

[5] F. ディアク，P. ホームズ『天体力学のパイオニアたち—カオスと安定性をめぐる人物史，上下』シュプリンガー数学クラブ，シュプリンガーフェアラーク東京 (2004).

[6] I. Ekeland, *Mathematics and the Unexpected,* The University of Chicago Press (1988).

[7] イーヴァル・エクランド『数学は最善世界の夢を見るか？　最小作用の原理から最適化理論へ』南條郁子訳，みすず書房 (2009).

[8] 石川 剛郎『V.I. アーノルド著「数理解析のパイオニアたち」』数理科学 2000 年 6 月号, サイエンス社.

[9] 河辺 六郎 責任編集・訳『ニュートン，自然哲学の数学的諸原理』世界の名著 **31**，中央公論社 (1979).

[10] マンジット・クマール『量子革命』青木 薫 訳，新潮社 (2013).

[11] マシュー・スチュアート『宮廷人と異端人，ライプニッツとスピノザ，そして近代における神』桜井 直文，朝倉 友海訳，書肆心水 (2011).

[12] V. A. Vassiliev, *Applied Picard-Lefschetz Theory,* Mathematical Surveys and Monographs **97**, Amer. Math. Soc. (2002).