愛媛の和算と算額

平　田　浩　一

愛媛大学教育学部

江戸時代に日本独自に発達した数学を「和算」といいます．愛媛には，和算を学んだ人々が「自分の学問の向上」や「一門の繁栄を祈願」して数学の問題を絵馬にして神社仏閣に奉納した「算額」が数多く残されています．特に幕末から明治にかけて松山市道後の伊佐爾波神社に奉納された算額は，難解な問題が多く含まれ，その当時の数学のレベルの高さを知ることができます．この講演では，愛媛の和算と算額について，具体的な算額の問題も少し解説しながら，分かりやすく紹介いたします．

1　日本の数学「和算」

日本での数学教育は飛鳥時代に律令国家制度のなかで数学を教育する場を設置したことに始まります．その当時の教科書には中国の数学書が使われており，計算には算木という木片を利用していました．九九も使われており，万葉集には「八十一」と書いて「くく」と読ませたり,「二五」と書いて「とお」と読ませるなど，九九を知らないと読めない和歌があることから，和歌を楽しむような知識階級には数学に関する知識がかなり広まっていたことが知られています．ソロバンが日本に伝わったのはそれからだいぶ経った室町時代です．

江戸時代に入ると，貨幣社会が進み一般庶民も計算ができないと仕事や生活に支障が起きるようになり，ソロバン塾や数学塾が開かれるようになりました．塾の教科書として日本独自の数学書も出版されるようになり，特に吉田光由の『塵劫記』（1627 年）は人気で，当時のベストセラーでした．鎖国によって海外の書物が入らなくなったこともあり，日本独自の数学「和算」がその後進展していきます．そのきっかけは，塵劫記の海賊版が多数出版されたことに対抗するため吉田が塵劫記を改訂する際にとった仕掛けにありました．吉田は答えの書かれていない難問 12 問（これを遺題という）を改訂版の巻末に載せて,「実

日本数学会秋季総合分科会市民講演会（2013 年 9 月 23 日）

表 1: 愛媛県内の算額（1）

番号	神社	奉納者	奉納年
1	伊佐爾波神社	大西佐兵衛	1803 年
2	伊佐爾波神社	小嶌又兵衛	1812 年
3	伊佐爾波神社	佐野長次郎	1832 年
4	伊佐爾波神社	簡野主計	1832 年
5	伊佐爾波神社	和田栄太郎	1837 年
6	伊佐爾波神社	仙波収平	1847 年
7	伊佐爾波神社	山崎喜右衛門	1850 年
8	伊佐爾波神社	山崎富太郎	1850 年
9	伊佐爾波神社	人川市太郎	1850 年
10	伊佐爾波神社	井手上丈左衛門	1850 年
11	伊佐爾波神社	栗林佐太郎	1850 年
12	伊佐爾波神社	河原保三	1850 年
13	伊佐爾波神社	花山金次郎	1850 年
14	伊佐爾波神社	越智峯次	1850 年
15	伊佐爾波神社	吉田茂兵衛	1854 年
16	伊佐爾波神社	伊崎為次郎・石崎良蔵	1861 年
17	伊佐爾波神社	俊野巻衛	1861 年
18	伊佐爾波神社	高坂金次郎	1873 年
19	伊佐爾波神社	桐野富五郎	1878 年
20	伊佐爾波神社	松岡太三郎	1879 年

力があるものはこれを解いてみよ」とけしかけたのです．吉田の問題を解いてその解答を出版した榎並和澄もまた新たな遺題を巻末に載せ，以後，このような遺題を出し合う遺題継承の習慣が繰り返されることとなり，和算家同士の切磋琢磨が始まりました．少し経って，関孝和，建部賢弘，安島直円など優れた和算家が現れるようになり，鎖国した小さい島国でありながら，江戸時代の和算は西洋数学とは異なる独自の発展を遂げたのです．庶民の間では，江戸に入ってまもなく絵馬を神社や仏閣に奉納するのにならい，額に数学の問題と解答を書いた「算額」を奉納する習慣が始まります．数学の力をつけたいという祈願や，難しい問題が解けるようになった感謝から奉納したもので，庶民にとっては算額奉納は研究発表の場でもありました．これが日本中に広がり，流行しました．現在でも千枚近くの算額が国内各地に残っています.

表 2: 愛媛県内の算額（2）

番号	神社	奉納者	奉納年
21	伊佐爾波神社	野本忠五朗	1884 年
22	伊佐爾波神社	中村正教	1937 年
23	伊佐爾波神社	関家喜多次（復元）	1823 年
24	太山寺	花山金次郎	1852 年
25	吉藤三島神社	松岡多三郎	1880 年
26	三津厳島神社	塩田民之丞（復元）	1810 年
27	金比羅神社	別所四郎兵衛	1788 年
28	伊豫稲荷神社	岩田源介	1797 年
29	内子八幡神社	岩田清謹	1847 年
30	元郷社三島神社	大野猶吉	1894 年
31	元郷社三島神社	判読できない	不明
32	法眼寺	岩田清謹（復元）	1794 年
33	大浜八幡神社	手嶋太助	1845 年
34	大井八幡神社	片山興平他 4 名	1906 年

2　愛媛の和算と算額

愛媛県内には 34 面の算額（内復元額 3 面）が現存しています（表 1, 表 2）．一番古いものは 1788 年（天明 8 年）に大洲市の金刀比羅神社に奉納された別宮四郎兵衛の算額です．特に，松山市の伊佐爾波神社（[4]）には 23 面の算額（内復元額 1 面）があり，一つの神社にこれほど多くの算額が残っているのは全国でもここだけです．この中から 3 つの算額を取り上げてみます．

2.1　大西佐兵衛の算額

大西佐兵衛は松山藩家老水野家の用人で，江戸で丸山良玄に和算を学びました．彼が著した和算書『雑題』30 冊があります（図 2.1）．それらは現在，愛媛県立図書館に所蔵されています．

大西の算額（図 2.2）の問題は「図のように，弧環減球（こかんげんきゅう）に中球 2 個と小球 1 個がある．中球，小球の直径の長さがそれぞれ 3 寸，2 寸のとき，弧環減球から中球 2 個，小球 1 個を除いた体積を求めよ.」という問題です．弧環減球は円を両側から 2

図 2.1: 大西佐兵衛の和算書『雑題』

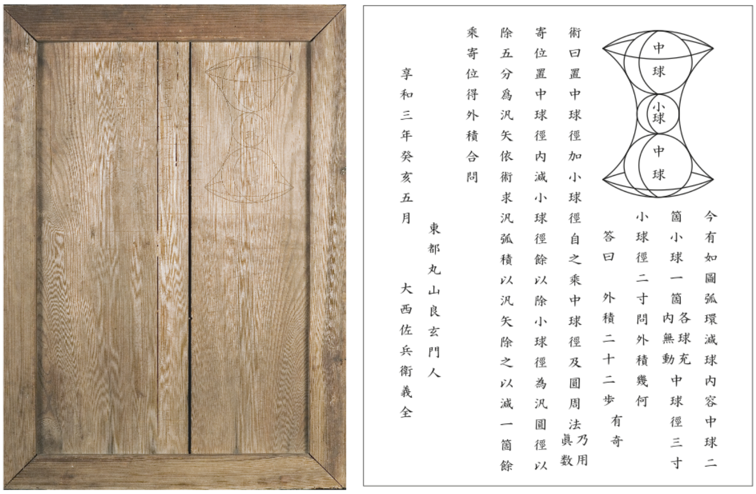

図 2.2: 大西佐兵衛の算額

円でくり抜き，それを回転させて得られる回転体です．その内側に入る 3 つの球の直径から回転体の形は 1 つに決まります．従って，弧環減球の形を求め，そのの体積を求め，そこから 3 球の体積を引き算すればよいわけです．その体積を現代の式で表せば，

$$V = 2\pi\left(\frac{128}{3} + \frac{225\sqrt{7}}{8} - 150\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{4}\right) - \left(\frac{4}{3}\pi + 2\cdot\frac{9}{2}\pi\right)$$

となります.

図 2.3: 『続神壁算法』

この算額は，当時の難易度の高い算額の問題を収録した『続神壁算法』という問題集に掲載されました．大西の算額は，掲載された算額の中で現存する唯一の貴重な算額です

2.2　山崎喜右衛門の算額

山崎喜右衛門は，和算を小嶌又兵衛に学び，その後，江戸を目指しながら徳島，大阪，京都の各地で和算の達人を訪ね，和算を学んだといわれています．江戸では,『続神壁算法』を著した藤田嘉言の子である藤田貞升に入門して，関流といわれる和算を学んでいます．この和算を学ぶ旅は 1 年に及びました．山崎が帰郷した後，松山藩校明教館で数学教授所が設置され，山崎はそこの初代主任教授に就任しています．

山崎の算額（図 2.4）には問題が 2 つあります．ここでは右側の問題を説明します.「図のように，正三角形内に天円 1 個，地円 1 個，人円 2 個を入れる．正三角形の 1 辺の長さが

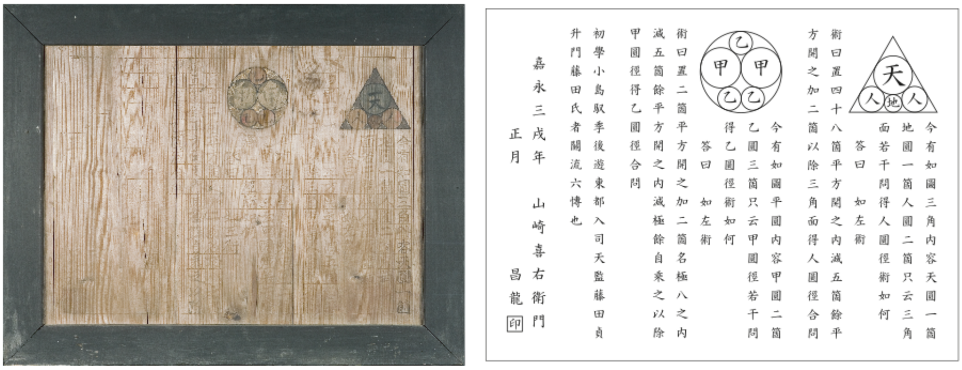

図 2.4: 山崎喜右衛門の算額

与えられたとき，人円の直径を求める方法を述べよ」という問題です.

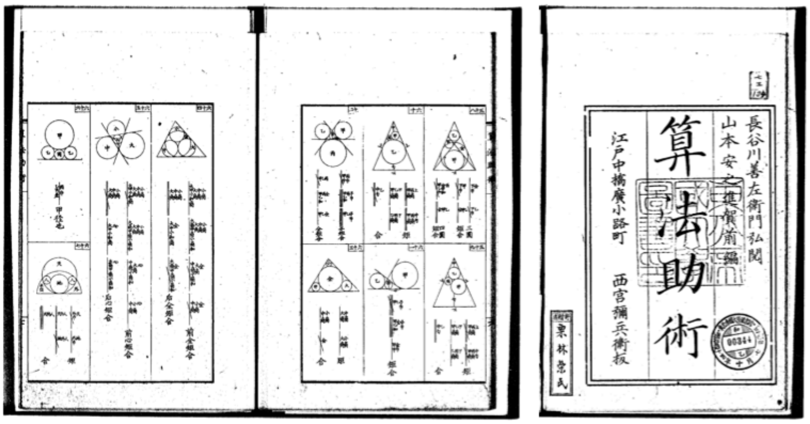

図 2.5: 『算法助術』1841 年

和算家が好んだ図形問題は，その図形のもつ性質を式で表し，連立方程式を立てるところから計算が始まります．筆者も自分で多くの和算問題を解いてみたが，立式に苦労することが多々あります．また，うまく立式できたとしても，その後の計算式が長く複雑なものとなり，収拾がつかなくなることも稀ではありません．和算家はというと，図形問題を解くために『算法助術』（[1]）のような公式集を利用していました．そこ収拾されている公式を用いれば，立式が容易になり，かつその後の計算も簡単になるという，すばらしいものです．山崎の問題を解くのに用いる和算公式を先に紹介しましょう．

補助定理 1 （図 *2.6*） 2 円 O_1，O_2 は互いに外接し，直線 l に *2* 点 A, B で接している．円 O_1，O_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とするとき，

$$AB = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

である．

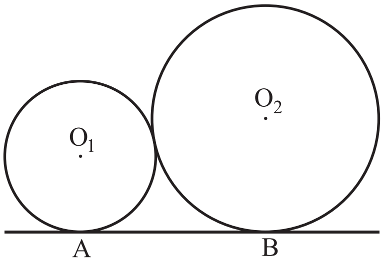

図 2.6: 算法助術の公式 40

補助定理 2 （図 *2.7*） 直線上に半径が r_2, r_3, r_2 の連結する *3* 個の円が載っている．これら *3* 円に外接する円の半径 r_1 は次式で与えられる．

$$r_1 = \frac{r_3^2}{r_2 - r_3}$$

実際に山崎の問題を解いて見ましょう．図 2.8 のように正三角形 ABC の 1 辺の長さを a とし，天円，地円，人円それぞれの中心を O_1, O_2, O_3，半径を r_1, r_2, r_3 とする．先ほどの 2 つの和算公式を利用すると，

$$\begin{aligned}
AD &= 3r_1 + 2r_2 \\
DC &= 2\sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{3} r_3 \\
AD &= \sqrt{3}DC \\
r_1 &= \frac{r_2^2}{r_3 - r_2}
\end{aligned}$$

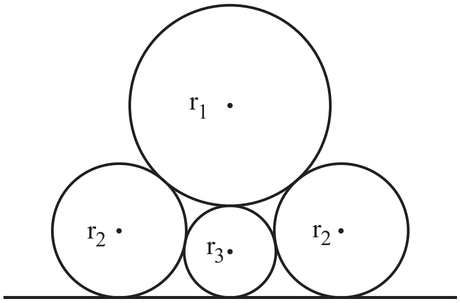

図 2.7: 算法助術の公式 66

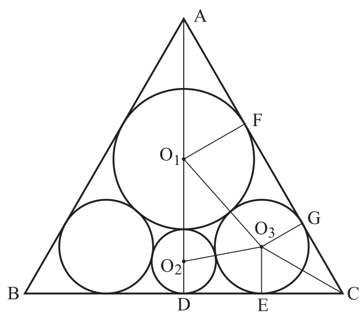

図 2.8: 山崎の問題の図

と式を立てることができ，$a = 2tr_3$ とおいて整理すると次の方程式に帰着する．

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = 0$$

この 4 次方程式は

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = (t^2 + 4t + 9 + 4\sqrt{3})(t^2 - 4t + 9 - 4\sqrt{3})$$

と因数分解することができ，

$$t = 2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}$$

と解くことができる．従って

$$\text{人円直径} = 2r_3 = \frac{a}{2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}}$$

である．

2.3 吉田茂兵衛の算額

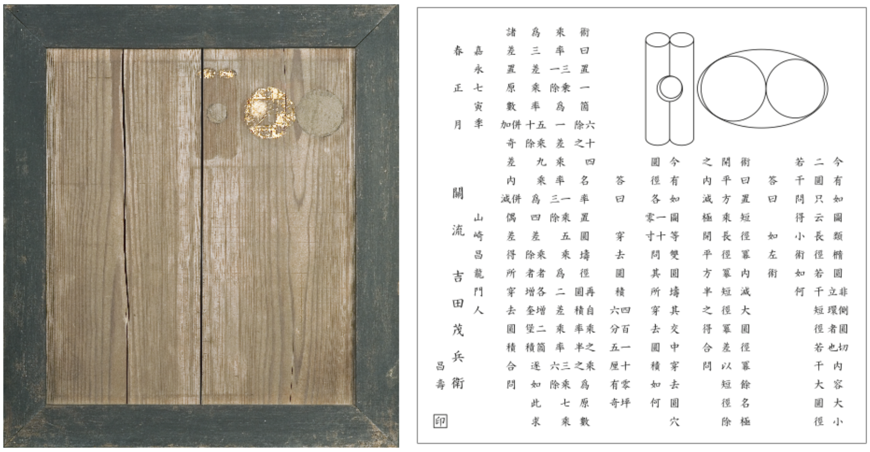

図 2.9: 吉田茂兵衛の算額

吉田茂兵衛の算額（図 2.9）も 2 つの問題からなっている．左の問題は円柱を 2 つ並べて，それと同じ大きさの円柱を垂直に貫通させて，抜き取った立体の体積を求める問題で

ある．ここでは，もう一方の類楕円の問題を取り上げてみよう．問題文は「図のように，類楕円（楕円ではなくトーラスを切ったもの）内に大小 2 個の円がある．類楕円の長径，短径，大円の直径の長さが与えられたとき，小円の直径を求めよ.」となっている．

トーラスの切断面にもさまざまあるが，トーラスの回転軸と平行な切断面で切ると対称性がよい.『算法楕円解』（[2]）によれば，トーラスを回転軸の上方から見た，図 2.10 において，直線 l（トーラスの幅 AB の中点を通り AB と垂直な直線）の位置の切断面で切ったものを「類楕円」または「環楕円」と和算では呼んでいる．また，直線 m の位置の切断面で切ったものは「尖楕円」と呼び，その他の直線の位置の切断面で切ったものを「環偏楕円」と呼んでいる．

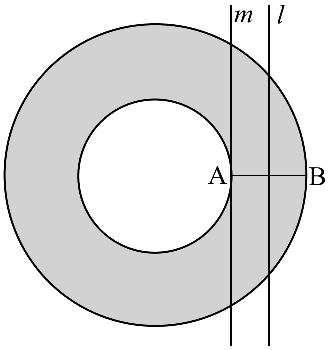

図 2.10: トーラスの切断面

図 2.11 に類楕円と通常の楕円の形状を比較している．類楕円の長軸の先は楕円のようには尖ってはなく丸くなっている．また類楕円の方程式は，長・短軸の長さを $2a, 2b$ とするとき，次の 4 次方程式

$$b^2(x^2 + y^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2(y^2 - b^2) = 0$$

である．

さて，次に，この類楕円に内接する円を考えることにする．微積分を知っている我々は類楕円の方程式を偏微分して接線の傾きを計算して，それをもとに内接円を求めようとしがちであるが，和算家はもっと巧妙な方法を用いていた．そのアイデアは，トーラスに球を内接させて切断面でトーラスと一緒に球も切ってしまうのである（[2], [3]）．図 2.12 はそのようすである．和算家は，円柱に球を内接させ，その切断面を使い楕円に内接する円の性質を調べている．それと同様な方法を類楕円にも適用しているのだ．

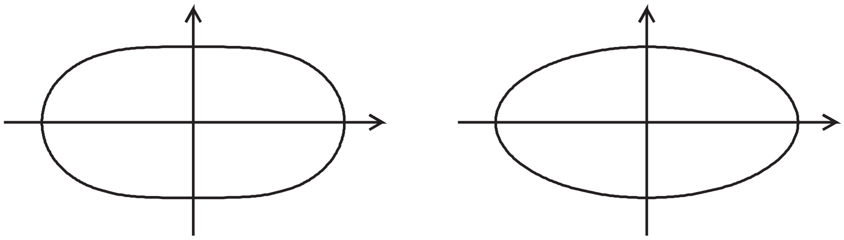

図 2.11: 類楕円（左）と楕円（右）

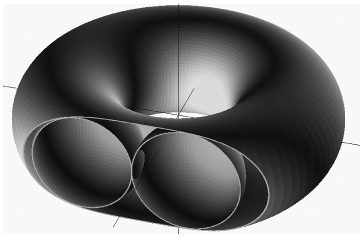

図 2.12: トーラス内に球を内接

さて，この類楕円の内接円を計算しよう．図 2.13 のようにトーラス内に半径 b の球を内接させる．トーラスに内接する球の中心を A，A から切断面に下ろした垂線の足を B とすると，B は球を切断面で切った切口の円の中心である．切断面における点 B の座標を $(p, 0)$ とする．$\mathrm{OA} = d$ とおくとき，$d = (a^2 - b^2)/(2b)$ である．また，$\mathrm{AB} = w$ とおくとき，直角三角形 CAB において，$w = \sqrt{b^2 - r^2}$ である．また，直角三角形 AOD において，$p = \sqrt{d^2 - (d - w)^2} = \sqrt{2dw - w^2}$ である．

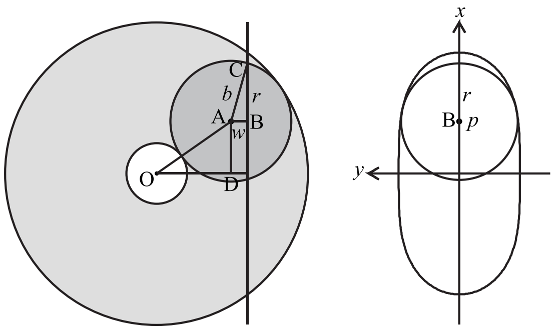

図 2.13: 類楕円の内接円

以上から，図 2.14 において，長軸 $2a$ で短軸 $2b$ の類楕円に内接する円の中心の座標を $(p, 0)$ とし半径を r とするとき，

$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b}$$

$$w = \sqrt{b^2 - r^2}$$

$$p = \pm\sqrt{2dw - w^2}$$

が成り立つ．

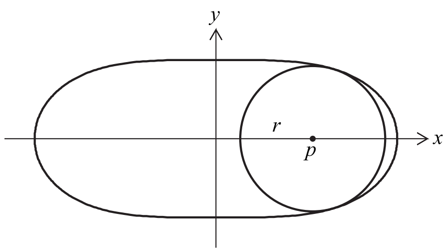

図 2.14: 内接円の位置と半径

これで類楕円についての準備ができたので，吉田茂兵衛の算額の問題のに移ることにする．図 2.15 のように，類楕円に内接する大小 2 個の円があるとき，それぞれの中心の座標を $(p_1, 0)$, $(p_2, 0)$ とし，それぞれの半径を r_1, r_2 とする．このとき r_1 から r_2 を求めるためには，以下の連立方程式

$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b}$$

$$w_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2}$$

$$p_1 = -\sqrt{2dw_1 - w_1^2}$$

$$w_2 = \sqrt{b^2 - r_2^2}$$

$$p_2 = \sqrt{2dw_2 - w_2^2}$$

$$p_2 - p_1 = r_1 + r_2$$

を考えればよい．

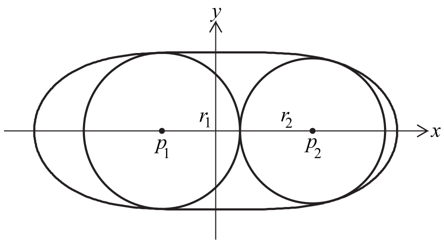

図 2.15: 類楕円の 2 つの内接円

この連立方程式を整理すればよいのだが，意外と大変である．和算家は上手に式を変形し，

$$r_2 = \frac{r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)}{d^2 + (p_1 + r_1)^2} \tag{2.1}$$

を導いている．詳細は [3]，[5] を参考してください．

3　まとめ

愛媛の和算と算額について，具体例を少し取り上げながら短い解説を試みてみました．愛媛県内の算額等の歴史及び数学的な内容についての調査研究活動は愛媛和算研究会（会

長:浅山秀博，会員:45 名）と共に続けてきました．ここ数年は，特に難解な伊佐爾波神社の算額について調査を行っていました．ようやくほぼすべてを解明でき，現代解としてまとめる作業を現在行っています．すべての整理が終われば一冊の本にまとめて出版しようと計画しております．また，研究の一部は [5] に取り上げています．

参考文献

[1] 長谷川弘閲/山本賀前編, 算法助術, 1841（天保 12 年）

[2] 村田恒光閲/豊田勝義撰, 算法楕円解, 1842（天保 13 年）

[3] 加藤平左エ門, 和算ノ研究 雑論 I, 日本学術振興会, 1954

[4] 伊佐爾波神社, 道後八幡　伊佐爾波神社の算額, 2005

[5] 平田浩一, 伊佐爾波神社の算額にみる江戸末期の和算, 愛媛大学教育学部紀要, 60 (2013), pp. 195–206.