女子中高生 夏の学校 2013
～科学・技術者のたまごたちへ～

ポスターセッション 「結び方と数学」

大島 和幸
愛知工業大学 基礎教育センター

1 はじめに

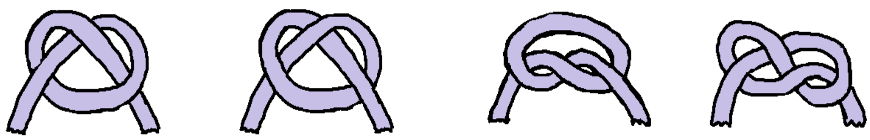
2013 年 8 月 8 日から 10 日まで埼玉県比企郡嵐山町にある国立女性教育会館において「女子中高生夏の学校 2013 ～科学・技術者のたまごたちへ～」が開催されました．2 日目の 9 日の午後にポスターセッションが行われ，日本数学会も「結び方と数学」というタイトルで参加いたしましたので，そのときのご報告をいたします．

夏の学校では参加者がいくつかの班に分かれます（班の名前は「ガウス」や「ボーア」，「パスツール」と言った偉人からとられていました）．当日は班ごとにいろいろなポスターを見て回るという趣向で，ひとつの班はおおよそ 10 分くらいで説明することになりました．

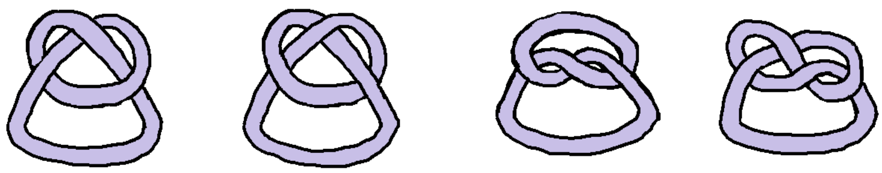
タイトルにもあるように内容は結び目の話をいたしました．２つの結び目が異なることを言うにはどうしたらよいかという問題です．以下に，当日だいたいどのような話をしたかを述べたいと思います．

2 発表内容

紐の結び方にはいろいろな形がありますが，以下の４つの結び方のうち，２つは実は「同じ」結び方です．



ここで「同じ」というのは「変形すれば同じ形になる」という意味です．ただ，紐の両端が開いていると，変形すればどれも１本の紐になってしまいますので，両端を閉じて考えましょう．



このようなものを数学では **結び目**（英語で knot）と言います．後々の説明のために，左から K_1, K_2, K_3, K_4 と名前を付けておきましょう．

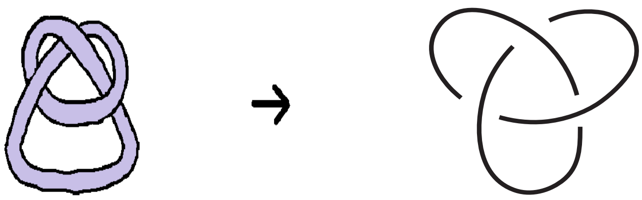
ポスターセッション当日は，ここで実際の紐で作った結び目（下の写真）をいじってもらってどの２つが同じかどうかを確認してもらいました．

実際，K_1 の紐の下の部分を持って上の方に移動させると K_3 と同じになることが分かります．

そのようにして２つの結び目が「同じ」であることを言うには，実際に変形して同じ形になることを確かめればいいのですが，では，２つの結び目が「異なる」ことを言うにはどうしたら良いでしょうか.「いろいろ頑張ったのですが，どうしても同じになりませんでした」というのではダメです.「頑張り方が足りないんじゃない？」と言われてしまうかもしれません．そう考えると，この問いに答えることは意外に難しいと気づきます．

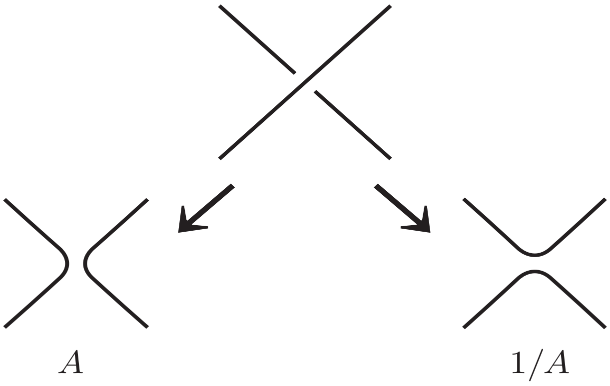
この「２つの結び目が本当に異なるのかどうか」という問いに対して，数学では**不変量**というものを導入して答えます．ここで，不変量というのは結び目を変形しても変わらない量という意味です．そうした結び目の不変量の一つに**ジョーンズ多項式** というものがありますので，ご紹介したいと思います．どうしてこのようなものを考えついたのかを説明するのは（筆者には）難しいのですが，計算のしかただけなら，中高生にも理解できると思いますので，少し詳しくジョーンズ多項式の計算方法をご紹介しましょう．何だかよく分からないけれど，結び目のような図形ひとつひとつから，それぞれ対応する多項式を導くことができるということを納得してもらえれば十分です．

以下，結び目を



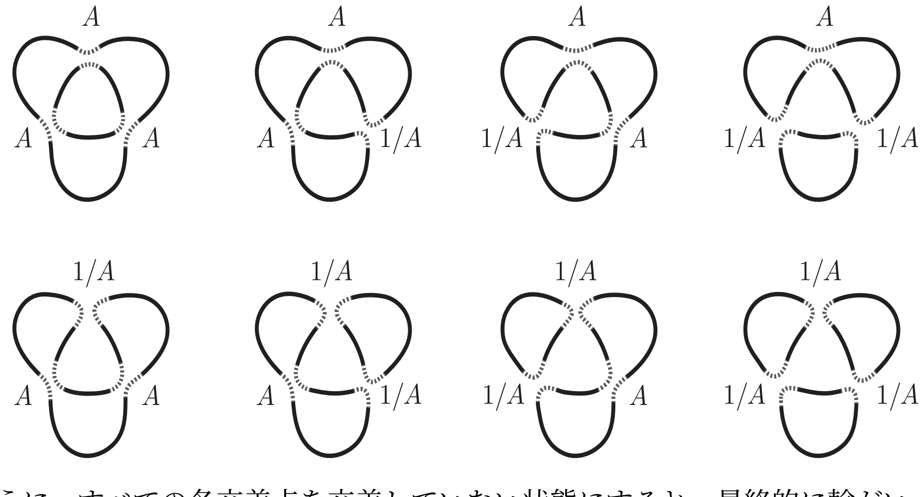
のように描くことにします．つまり紐を線で表してしまって，交差するところの上下関係を図のように表すことにします．

さて，まず結び目の各交差点に対して，下図のように交差していない２つの状態



を考え，それぞれに A と $\frac{1}{A}$ という量を対応させます．結び目に交差点が n 個あれば，n 個の交差点それぞれに 2 つの状態が考えられるので，すべてを交差していない状態にすると，交差点が n 個ある結び目には全部で 2^n 個の状態があることになります．

例えば，K_1 の結び目には 3 つの交差点がありますので，$2^3 = 8$ で，次の 8 つの状態があります．



このように，すべての各交差点を交差していない状態にすると，最終的に輪がいくつか出来ることに注意します．その輪の数を d で表しましょう．

そして，各状態に対して，

$$\left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{d-1} \times \left(\text{ 各交差点の } A \text{ または } \frac{1}{A} \text{ を掛け合わせたもの}\right)$$

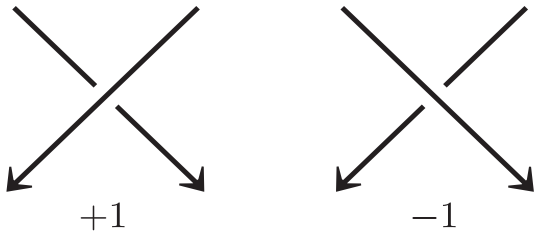
という量を考えて，全ての状態について足し合わせます．結び目 K に対して，これを結び目の **状態和** とよび，$\langle K \rangle$ と表します．

さきほどの K_1 の例に対して計算すると，

$$\begin{aligned}
&\langle K_1 \rangle \\
&= \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{2-1} A^3 + \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{1-1} A + \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{1-1} A + \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{2-1} \frac{1}{A} \\
&\quad \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{1-1} A + \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{2-1} \frac{1}{A} + \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{2-1} \frac{1}{A} + \left(-A^2-\frac{1}{A^2}\right)^{3-1} \frac{1}{A^3} \\
&= -A^5 - \frac{1}{A^3} - \frac{1}{A^7}
\end{aligned}$$

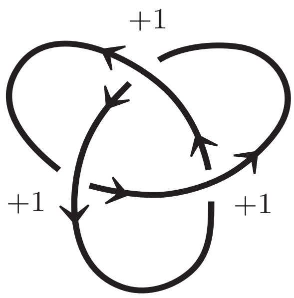
となります．

さらに次のように ”ねじれ ”に対応する量を追加します．まず紐をぐるりと一周するとき，どちら向きに回るかという向きを定めます（どちら向きでも構いません）．そうすると，交差点において向きも含めた状況としては次の 2 通りの場合があります．矢印は紐を回るときの進行方向です．



ここで図の左側のように交わっていたら $+1$，右側のように交わっていたら -1 と定め，この ± 1 をすべての交差点について足し合わせたものを考えます．結び目 K に対して，これを **ねじれ数**（英語で writhing number）と呼び，$w(K)$ と表しましょう．

さきほどの K_1 では



ですので，$w(K_1) = 1 + 1 + 1 = 3$ です.（逆向きに向きを定めても，同じ結果になることを確かめてみてください.）

以上の状態和 $\langle K \rangle$ とねじれ数 $w(K)$ を用いて，

$$J(K) = \left(-\frac{1}{A^3}\right)^{w(K)} \langle K \rangle$$

と定まる量が結び目 K の**ジョーンズ多項式**（Jones polynomial）です．K_1 に対して計算すると

$$\begin{aligned} J(K_1) &= \left(-\frac{1}{A^3}\right)^{w(K_1)} \langle K_1 \rangle \\ &= \left(-\frac{1}{A^3}\right)^{3} \left(-A^5 - \frac{1}{A^3} - \frac{1}{A^7}\right) \\ &= -\frac{1}{A^{16}} + \frac{1}{A^{12}} + \frac{1}{A^4} \end{aligned}$$

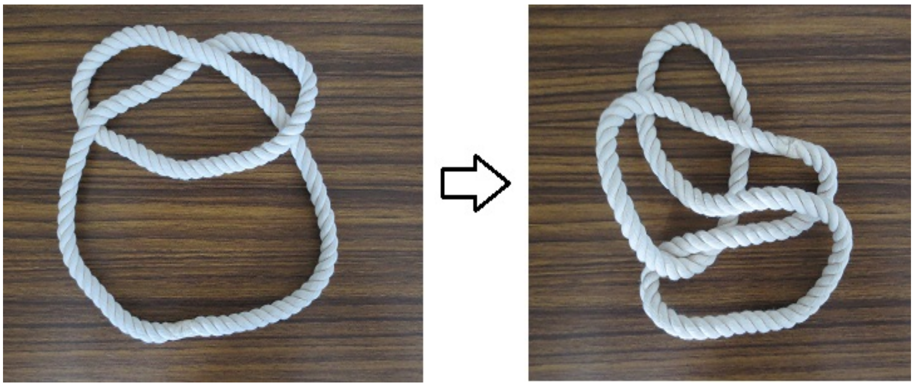
となります．このように A についての（ローラン）多項式になります．

他の結び目に対しても同じように計算をしてやると次のようになります．

$$J(K_2) = -A^{16} + A^{12} + A^4$$

$$
\begin{aligned}
J(K_3) &= -\frac{1}{A^{16}}+\frac{1}{A^{12}}+\frac{1}{A^4} \\
J(K_4) &= \frac{1}{A^8}-\frac{1}{A^4}+1-A^4+A^8
\end{aligned}
$$

大切なことは、**このようにして出来る多項式は結び目をどう変形しても不変であることが証明できる** ということです．下の写真は左側の結び目をグシャグシャと変形して右側にしたものですが，両方ともジョーンズ多項式を計算すると，共に $-\frac{1}{A^{16}}+\frac{1}{A^{12}}+\frac{1}{A^4}$ になるということです．



グシャグシャと変形してもジョーンズ多項式は同じ

ポスターセッションのときに，その証明を説明することはさすがにできなかったのですが，もし興味があったら見てもらえるようにパンフレットにして配りました．詳しくは参考文献 [1] などをご覧いただけたらと思います．

そういうわけで，ジョーンズ多項式が異なれば，どんなに頑張って変形しても同じ形にはならないことが分かります．つまり，K_1 と K_2 と K_4 は互いに異なる結び目であることが証明できたわけです．

もう少し詳しく調べてみると，K_1 と K_2 のジョーンズ多項式はちょうど A と $\frac{1}{A}$ を入れ替えた形になっています．また，図形の方は交差点の上下が入れ替わった形になっています．K_1 の図形を鏡に映しますと，K_2 の図形のように見えますから，このような関係を **鏡像** の関係と言います．実はこれは一般に成立する性質で，結び目 K と鏡像の関係にある結び目 K' のジョーンズ多項式 $J(K')$ は $J(K)$ の A を $\frac{1}{A}$ にして得られることが証明されています．ジョーンズ多項式は，このように鏡像の関係にある図形も区別してくれます．ここで，K_4 のジョーンズ多項式を見てみると，$J(K_4)$ は A と $\frac{1}{A}$ を入れ替えても同じ形をしていますので， K_4 の鏡像（つまり，交差点での紐の上下を入れ替えた結び目）は変形して K_4 にできるのではないかという期待が持てますが，実際そうなることが確かめられます．また，K_1 と K_3 は変形して同じ形になりますので，確かに同じジョーンズ多項式になっています．

ところで，ジョーンズ多項式が同じであれば，頑張ればいつか同じ形にできるかと言うと，実は必ずしもそうではないのです．つまり，ジョーンズ多項式が同じであっても，異なる結び目があるということが分かっています．そのような意味でジョーンズ多項式はまだまだ精度の粗い不変量であり，現在もより精度の高い不変量を求めて研究が進められています．

3　発表を終えて

結び目の話は図と多項式で話せること，現在も活発に研究が進められていること，という点で中高生に話すには良い題材と思い，選択しました．また,「絶対にできないということを証明する」ことは数学の特長のひとつですので，そのようなことを伝えることも意味があると思いました．

実際には，ここで説明したようなジョーンズ多項式の計算方法を詳しく述べることは，ほとんどできなかったのですが，図形に対して変形しても変わらない量が対応することを不思議だなと感じてもらえれば良いかな，と思いながら話していました．

はじめにでも述べたように当日は班ごとにポスターを回るという趣向でしたので，ひとつの班にかけられる時間は 10 分くらいの予定でしたが，いざ話し始めると話が長くなり，とてもすべての班の人に説明できなかったのが残念です．

今回の夏の学校では，班ごとに最も面白いと思ったポスターを選ぶという企画があったのですが，数学会のポスターを選んでくれた班もありました．

また，班ごとに興味をもったポスターについて，自分たちでいろいろ取材をして「夏学タイムズ」という記事を書くという企画もあり，ひとつの班が，数学会のポスターの記事を書いてくれました．その記事を見せてもらったのですが,「図形に式が対応して，その式が図形を変形しても変わらないもの，ということに驚いた」,「ジョーンズ多項式と図形の鏡像の関係が面白かった」というような感想を記してくれて，とても嬉しく思いました．

4　おわりに

ポスターを作る際，群馬工業高等専門学校の清水理佳先生，九州大学の横山俊一先生，お茶の水女子大学の大山口菜都美さん，津田塾大学の千島萌記さんに大変お世話になりました．筆者のモノクロで地味なポスターを，とてもカラフルで魅力的なポスターに変えていただきました．その結果，生徒さんの目を惹くものになったと思います．

清水さんと大山口さんには発表の際にもずいぶんと協力をしていただきました（もしかしたら，筆者よりも頑張ってもらったかもしれません）．また，清水さんにはこの原稿の結び目の図も描いていただきました．本当にありがとうございました．

東京大学の柏原賢二先生には，準備の段階からいろいろな面でご助力いただき，誠にありがとうございました．

最後になりましたが，このような機会を与えていただいた九州大学の小磯深幸先生，日本大学の平田典子先生，東北大学の宮岡礼子先生に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] 「結び目と量子群」　村上 順　著　朝倉書店

[2] 「結び目のはなし」　村上 斉　著　遊星社

[3] 「結び目理論とゲーム」　河内 明夫 ・ 岸本 健吾 ・ 清水 理佳　共著　朝倉書店