工学系数学基礎教育改善についての現状報告
― 新しい Calculus 教科書作成に向けて ―

工学系数学基礎教育研究会世話人
金沢工業大学数理教育研究センター
藤本一郎

昨年 2 月に実施した「工学系数学基礎教育に関するアンケート調査」の報告を「数学通信」第 17 巻第 2 号（8 月号）に掲載しましたところ，多くの方々から反響を頂きました．中でも当時の日本数学会理事長の宮岡洋一先生は事態の深刻さをご認識頂き，問題解決に向けて面談の機会を設けて頂きました．その折に工学系数学基礎教育の直面する諸問題を改善する為に以下の諸項目について施策を講じて頂くことを要望しました．（文献[1]）

１．工学系学部では応用分野の数学者が望まれているのに対して，我が国ではそのような分野の研究者・教育者の育成が立ち遅れている為，大学院課程数学専攻において応用分野の拡充と教育職への導入・奨励を図る．
２．工学部では数学教育職が工学専門教員に取って代わられる事態が進行している為，複数の学部に分散所属する数学教員の再組織化を促し，数学教員組織の監督・責任の下に数学教育を執り行うべく制度化を図る．
３．大学数学基礎教育の現場における授業時間数・数学教員不足を改善する為に大学数学基礎教育に予算を重点化してポジションを拡充し，若い有能な数学学位取得者で未就職な人達（OD：オーバードクター）の正規雇用を促進する．

この様な諸問題の要因には様々な要素が考えられるが，我が国の数学界全体として「応用」や「教育」の分野に真剣に向き合って来なかった責任は大きいと思われる．また，これを読まれている理学系の数学教員の方々も，物理や化学等の数学専攻以外の学生の数学教育を担当されている状況で同様の問題を共有されており，数学教員を供給する側として数学者の職が狭められている現実は無視できない関心事と思われる．それよりも何よりも，数学教育は技術立国である日本の基盤をなすものであり，今我が国の技術分野の国際競争力の低下の責任の一端は我々数学者にもあることを認識しなければならない．これらの解決には政府機関への働きかけと同時に，各大学で改善していく努力が必要であり，何より数学界全体としての改革への強い意識が必要に思われる．

特に，上述の 2 番目の問題点に関して，この前のアンケートで明らかになったように，殆どの工学部専門教員は「数学者による数学教育」に対して不満を持っているという事実を率直に認めなければならない．この問題に対して数学者側から改善に向けて積極的に取り組む姿勢を示さない限り，工学部において数学者の雇用を増やしたり，数学者が応用系学生の数学教育に対して再び責任を持つことは出来ないと思われる．

この様な状況の下で，工学系数学基礎教育研究会では旧世話人会の間で，日本の工学系数学教育に最も欠けているものは何か，またそれを改善する為に今我々が出来ることは何かという観点から議論する中で，応用系の学生の為に数学のしっかりとした基礎と応用を学ばせる Calculus 教科書作成の案が提案された．実際，入学生の学力が低下する状況の中であっても，特に国公立大では授業時間数は以前の週 1 コマ（90 分）に固定したままの大学が多く，必然的にその教科書は基礎理論（証明）と応用が切り捨てられたコンパクトミニマムなものが大半を占めているのが現状である．従って，前述のアンケートにおける工学部専門教員からの回答にもある通り，大半の学生は工学部の専門教員が望むような数学の基礎学力・応用力を身に付けないまま上級学年次の専門課程に進学し，その為に専門課程では工学部専門教育としての本来あるべき教育が出来ず，その結果は技術分野における昨今の我が国の国際競争力の低下と無縁でないことは前述した通りである．

実際，我々の教科書作成の意図として，数学の自然科学や工学等の諸分野への応用例から学習の動機付けや専門諸分野への導入が図られた教科書を用意しておけば，数学者による応用系学生に対する数学教育を大いに助け，また工学専門教員や非常勤教員も含めて教授者に依らずに教育内容を国際的なレベルに維持することに繋がる．この様な経緯から，昨年 3 月の東京理科大学で開催された「第 14 回工学系数学基礎教育研究会」では我々研究会の活動基本方針として，この「新しい応用系の学生の為の Calculus 教科書作成」のプロジェクトが提案され，最優先事項として採択された．これを受けて，その活動資金を得る為に筆者を研究代表者とし，新世話人を中心とした４名の有志の先生方（その後もう一人が後に参加）を研究分担者として科研費（研究課題名：「新しい工学系数学基礎教育のための Calculus 教科書作成」）を申請し，幸いにもこの度 H25～H27 の 3 年間の助成基金が交付されることになった．

一方，この 2 月に当時の理事長より前述の要望書を踏まえて，本来あるべき工学系数学教育とその現状との差異について報告することを依頼された．我々は科研費申請当時から申請メンバーからなる「教科書編集委員会」を立ち上げ，本来あるべき工学系数学教育のカリキュラムと教科書の内容の検討を進めてきた．そこでこの理事長の要請に応えるために，米国等の多くの大学で採用されている “Standard Calculus” の内容を策定し（資料１），大学のカテゴリー別にその使用例（シラバス）（資料２）とこれらに基づいた工学系数学教育カリキュラム（資料３）を作成して，3 月の京都大学において開催された「第 16 回工学系数学基礎教育研究会」において，この新しい教科書の内容とそれに基づいたカリキュラム案を提案し，全会一致で理事長に報告することが承認された．以下，この研究会報告の詳報としてこれらの資料を順次説明する．

１．新しい教科書の内容（資料１）

前述のアンケートでは，現行の微分積分のコースでは時間不足の為に，高校から大学への接続部分に十分時間を費やすことが出来ず，また定理の証明を省略したり，応用に触れる余裕が殆どなかったりで学生の習熟度が達成されていない為，殆どの国公立大からの回答では現行の週 1 コマ（90 分）の 2 倍の時間数が必要という意見が多かった．また，高校までの暗記型の学習から国際的に通用する理系技術者の「論理的思考力」を養うためには深く学習する時間が必要になる．この為，この部分の授業時間数を週 2 コマとして米国等の多くの大学で採用されている Calculus コースの内容を我が国の環境に落とし込んだものを基に作成した教科内容が資料１である．ここでは，筆者が実際に使用し，米国等で現在多く採用されている定評のある教科書([2], [3], [4])を参考にした．唯，一見通常の "Calculus" の構成のように見えながら，後で説明するように多くの応用の中でもとりわけ物理への応用を少し掘り下げた形で取り扱うようにした為，実質は理工系の学生の為の生きた応用数学（数理物理）への入門書としての狙いが含まれている．

本来ならば，日本におけるスタンダードな微分積分の教科書はどうあるべきか，現在の我が国の置かれている環境と新しい時代の要請から議論を煮詰めた後で方向性を示すのが筋だと思われる．実際，本年度からスタートする我々の科研費プロジェクトではそのような研究も含まれている．（現在我々の科研費プロジェクトでは世界各国の大学数学基礎教育について調査中であり，後日報告する予定である．）従って，我々のプロジェクトが進む過程で多少の内容変更があるかも知れないが，まず米国等世界の多くの大学で採用されているグローバルスタンダードな教科書の内容を日本語で紹介しておくことも，たたき台を用意するという意味で重要であると考えた．

それでは，この幾分「伝統的な」行き方以外にどのような方法が考えられるのか．1980 年代の後半，当時 SUNY, Stony Brook の教授だった Ronald G. Douglas 氏を中心とし，「Calculus コースのあり方としてこれ以外にないのか」と問題提起されたことがある([5])．（因みに Douglas 教授は作用素論・作用素環論の重鎮で，私はアメリカにいた頃に研究集会で何度かお会いしたことがある．アメリカでは数学教員は教養科目から大学院の専門科目に至るまで平等に担当する民主的なシステムになっている．）その後，"Calculus Reform" と題した研究会や報告が多くなされたが，アメリカの Calculus コースは現在でも殆ど変わっていない．ただし，コンピュータを援用したクラス運営とか，"Rule of Four"（every topic should be presented numerically, graphically, symbolically and verbally）とか，そういう teaching method に関しては個々に試みられているようである．この方向で書かれた教科書に[6]があり，その他にも WEB で公開されている教科書がいくつかある．

この Calculus Reform に関する種々の報告によると，この様な新しい方法は初学者には歓迎されているようであるが，コースの合格率は上がったものの，学生の performance は

伝統的なコースに比較して低く，高校で Calculus をある程度学んできた学生にとっては鬱陶しく思えるのだろう．この reformed class を選択する学生は年々減少し，既に廃止した大学も多い．このように，アメリカの数学教育はある意味，伝統的な方法に回帰しているのが現状である([7]).

この場合，工学等の専攻分野の学生に対してどのような数学教育が相応しいのかという事を見極めなければならないが，往々にしてこの様な議論は「群盲象を撫でる」が如き議論になり易い．一般に，実際に数学分野以外の専攻において数学を応用した経験がない場合は，視野の狭い学習方法の議論に陥り易いが，幅の広い学際的な見地からの判断が必要である．やはり，理工系の学生にとっては専門の学習に入る前に微分積分＋物理数学入門のような内容が自然科学を学ぶ上での準備として必要であり，重視されるべきだろう．我が国では殆どの大学においてこの後者が切り捨てられているのが現状である．

我々の Calculus に対する考え方は「自然に学ぶ」という姿勢でありたい．実際，微分積分学は Newton によって創始された当初から物理との関連が深い．従って，我々のテキストでは全体として各 Chapter を独立に扱うのでなく，微分（速度）→ 積分（道のり）→ 級数・微分方程式（運動方程式，振動）→ ベクトルの媒介変数表示（運動方程式を解いてトラジェクトリを求める）→ 偏微分と重積分（ポテンシャルと運動）→ ベクトル解析（力学・電磁気の保存則）という様に数学と物理の 2 つの理論の展開の流れが織なして一つの融合した自然概念の流れが読み取れるように留意したい．この為に，通常は最終章に置かれることが多い微分方程式入門の章を級数の後に配置し，その後の 2 次元及び 3 次元のパラメータ表示の微積分を運動方程式の解としての運動の記述という扱い方が出来るようにした．

執筆方針としては，数学的な定理の証明は出来るだけ本文に取り入れるが，繁雑になる場合や難解な場合は巻末の Appendix にまわす. 例えば，極限定理では関数の和の極限は本文で ε - δ 論法によって証明するが，積・商は巻末にまわす．この様に，本質的な理解に必要な厳密さと読みやすさをこのコースの目的の観点から配慮したい．基本的な証明の理解は理系大学生の「論理的思考力」育成の為でもあり，結局微分積分の原理を根本的に理解していなければ応用も利かないのである．これらは，上述のアメリカの伝統的な教科書に採用されている方針であって学ぶべき点が多い.

その他，各 Chapter（または§）において初めての概念の導入に当たっては具体例からの導入部分を設け，自然現象と共に理解すると同時に学生の学習意欲を喚起する．また，本文中の例題や演習問題にも幅広い分野からの応用例を入れて現実の事象との関連を学習することによって応用問題に慣れさせる．（近年の高校までの教科書から応用に関する記述が著しく減少しているという報告がある．）この様に，物理や工学等の応用分野の学生に対して，数学を現象と共に学習することによって数学の学習を「楽しい」あるいは「さらに

深く学習したい」と思わせるようにしたい．従って，我々の教科書は全方位的なアメリカの Calculus 教科書よりも多少応用数学（数理物理）的な主張がはっきりした教科書になる予定である．

また，巻末の Appendix ではクラスのレベルに応じて使える「基礎数学」からの復習や，本文中の定理の証明，Analysis (解析) における実数の位相に関する基本定理等を本文と同じように必要ならば実際の授業で挿入して使用できる形で用意する．これによって本書を殆ど全てのレベルの大学で使用することを可能にし，学生の方も微積分の教科書はこれ一冊で事足りるようにして，生涯の座右の書とすることが理想である．この追加の復習のみでは依然不十分なレベルの学生層に対して，このコースの前に履修すべき「基礎数学」（Pre-calculus）の教科書を本書と同様の方針で用意することは今後の課題である．この分野は我が国ではリメディアル教育と呼ばれている範疇に入るのかも知れないが，そのような補習的な教育でなく，正規の大学数学基礎教育として本格的に取り組むべき課題である．

アメリカの Calculus の教科書の良さは何と言ってもその分かり易さである．誰でも，やる気にさえなって読めば分かるように書かれている．従来の日本の行間を読ませるような書き方で学生を鍛えるという考え方もあるが，殆どの学生の目的は数学以外の物理や工学の専門の学習にあるため，出来るだけ途中で不必要な苦労をさせたくないという考え方であろう．しかし，かなり深い定理や問題にまで踏み込んでいるので，学生のレベルに応じて取捨選択することによってどのようなレベルの学生層にも合わせられる．また，カラー印刷やグラフを用いた視覚的な解説も取り入れたい．唯，全ての要求を満たそうとすると，アメリカの Calculus 教科書のように 1200 ページの大部になる．記述が冗長になることを避けて，内容を厳選して行けばその半分ほどのページ数に収められるのではないかと考えている．

２．新しい教科書の使用例（資料２）

資料２では大学のカテゴリー別に新しい教科書を用いた場合の使用例（シラバス）を提示した．いわゆる高等教育の発展段階については，カリフォルニア大学教授の Martin Trow 氏によって提唱された，大学進学率の指標による３種のカテゴリーへの分類が以前より知られている．それぞれの境目は大学進学率が 15%, 15%～ 50%, 50%以上に相当する．そこで，この分類を大学数学教育への準備段階の分類に転用して，全理系大学入学生を母集団として数学の成績のトップ 15%の学生を主な構成員とする大学またはクラスを「カテゴリーＡ」，次のトップ 15%～50%の学生層を主な構成員とする大学またはクラスを「カテゴリーＢ」，そして主にトップ 50%以下の学生層を構成員とする大学またはクラスを「カテゴリーＣ」と呼ぶことにする．実際，入学時の学力診断によって能力別クラス編成を実施する大学も多く，ひとつの大学でも複数の型のコースを設定することも視野に入れている．

カテゴリーＡの大学またはコースでは，現在１年次の前学期に１変数の微積分，後学期に級数と多変数の微積分を週１コマで教えている場合が殆どである．また，このレベルの学生は高校数学の基礎が出来ている為，Chapter 1 については 2 コマ程度で，大学数学の記法，関数・合成関数・逆関数等の厳密な取り扱い，双曲線関数，逆三角関数等の高校では学習しなかった題材を中心に講義できる．また，「微分方程式」と「ベクトル解析」は必修科目として用意されているので，教科書のこれらを除いた内容（ただし，変数分離形は学習する）を２学期間で Calculus Ia および Calculus IIa として学習することが出来る．資料１の各§の内容がほぼ 1 コマ分の講義内容に相当するとして，前・後学期のそれぞれにおいて，講義 24 コマ，演習 6 コマ，試験１コマ，予備１コマで合計 32 コマになる．実際は 1 コマでカバーできない§もあると思われるが，その分は演習にかける時間を転用できる．現状と比較すれば，授業時間数が 2 倍になった分だけ深く内容を掘り下げた学習が出来，また応用の学習や演習に時間が取れる．

カテゴリーＢの大学またはコースでは，アメリカのスタンダードなカリキュラムと同様に３学期かけて Calculus I, II, III のフルコースを学習することを勧める．現行のこのコースでは殆どＡコースと同じカリキュラムを組んでいる場合が多く，新カリキュラムでもＡコースと同じカリキュラムを組みたいと思われるかも知れない．しかし，学生の学力に対して進度が速い場合，学習した内容が十分浸透するのを待たずに次に進むという状態では，結局学習内容が身に着かないことになる．また，2 年次の前期が終わった段階で比較した場合，Ａコースで学習した学生とＢコースで学習した学生の習得内容の差は殆どないと言えよう．（選択科目の１コマ分進度が速いだけである．）むしろ学習内容の定着度から言えば，Ｂコースで学習した学生の方が内容の定着度が高いかもしれない．ただし，偏微分と重積分を 2 年次前期に学習することになるので，これらを用いる専門科目は 2 年次の後期以後に開講する配慮が必要になる．

この新しい教科書を用いてスタンダードな Calculus I, II, III を学習した場合，各学期とも講義を 20 コマ，講義３回に対して演習１コマを取るとすれば演習は計 6 コマ，応用プロジェクト（専門との関連）2 コマ，試験 2 コマ（中間試験＋期末試験），予備 1 コマで合計 32 コマになる．また，随時演習を取り入れながら講義を進める（これが通常のやり方かも知れない）という方法もあるだろう．

基礎教育の段階の学生にとって，自分が将来学習する専門において，今学んでいる数学が実際にどのように応用されているのか知ることは有益である．「応用プロジェクト」ではこの様な専門との接続に関する題材を学習する機会として提案したい．物理・化学系から工学系の諸分野の専門課程の学習につながる研究課題の実例集を一つの章にまとめるか，または別冊として用意する予定である．Ａコースの場合も，時間に余裕があれば取り入れて頂きたいところである．

カテゴリーＣの大学またはコースでは約半数近くの学生が推薦入試で入学しているのが現状であろう．この為に，Chapter 1 の学習においては指数関数や三角関数の復習をそれぞれ 2 コマずつ，計 4 コマ程度追加学習して基礎を固める必要があると思われる．この場合，最初の学期は Calculus Ic として「微分とその応用」を Chapter1 ～ Chapter 4 に沿って学習することになる．2 学期目は Calculus IIc として「積分とその応用」を Chapter 5 ～Chapter 10 の中のアドバンストな数節及び極座標と 2 次曲線を除いた内容を学習する．3 学期目として，ベクトル解析を必要とする専攻では Calculus III を学習することができる．あるいは，無理をせずに Calculus IIIc として 2 次元のベクトル値関数（2 次曲線を含む）からはじめて多変数の微分積分（Chapter 11 ～ Chapter 14 の一部）を学習してもよい．この場合は，ベクトル解析の積分定理については 1 コマの概説を付け加える程度しか触れられないので，これらを必要とする学生の為に選択科目として改めてベクトル解析を含む選択科目を用意する必要がある．

３．新しい工学系数学教育カリキュラム（資料３）

以上に説明した微分積分の新しい学習形態に移行した場合のカリキュラムを大学カテゴリー別に表にまとめたものが資料３である．工学系数学教育の基礎教育科目としてどのような科目が適切かについては大学によって異論があるかも知れない．ここでは，工学系数学統一試験（EMaT）の出題範囲となっている科目群，即ち「1 変数及び多変数の微分積分」，「線形代数」，「微分方程式」，「確率統計」，および Calculus の一部である「ベクトル解析」を必修とし，「フーリエ解析（＋ラプラス変換）」，「複素解析」を選択科目とした場合に限って考察した．それぞれ，現課程の平均と新課程のカリキュラムを比較対比させ，必修科目を色分け（濃淡）によって示した．

ここで，EMaT（HP: http://www.aemat.jp/exam/ 参照）について説明を加えよう．EMaT は元々広島大学工学部と山口大学工学部の共同研究（特色ＧＰ）によって工学系学生の数学能力を客観的に評価するシステムを構築することを目的として創始され，現在では約 50 校 2500 名が参加する全国統一試験である．学生にとっては自分の数学力の自己点検に役立てることが出来，また一部の大学では大学院入試の一部としても使われているようである．このプロジェクトは当初は世界レベルでの評価システムの構築を目指していたが，それを実現する為には日本の数学教育を応用重視のカリキュラムに合わせていくことが必要かもしれない．（現在のところ応用分野の問題は出題されていない．）

さて，資料３の説明に戻るが，カテゴリーＡの大学では現 9 コマの課程が 11 コマの課程になる為，2 コマ（22%）増となり，単純に見積もれば約 2 割程度の数学基礎教育担当教員の増員が必要であることが分かる．この新課程では 2 年次で現行の数学の学習を終えることが出来る．

同様に，カテゴリーBの大学では現 9 コマの課程が 12 コマの課程に移行すれば 3 コマ（33%）増となって，額面通りに解釈すれば約 3 割の数学教員が不足する．しかし，このカテゴリーの大学では数学教員の分散化や，大学院数学専攻においても博士号を取得して大学教員として職を得る卒業生の輩出が少なくなる傾向が進んでいるため，組織的な再編が必要である．数学教員組織を再編して需要のある応用数学分野の研究を奨励し，これらの分野の研究者・大学教員を輩出していくことも考えるべきだろう．これらの教員再編の努力によって，1 割程度の不足を補うとすれば，やはり 2 割程度の教員増が必要である．

カテゴリーCの大学では「微分積分」は既に週 2 コマに移行しているため，新課程に移行しても 1 コマ（Calculus III を採用した場合）～ 2 コマ（Calculus IIIc を採用した場合）の増加にとどまる．しかし，このクラスの大学では現在選択科目が大幅に犠牲になっている為，これらを復元する必要があることや，今後準備不足の学生に対して「基礎数学」を正規の科目としてカリキュラムに取り入れていくことを想定すれば，これも 2 割程度の数学教員増が必要である．

結局，国際標準の大学数学基礎教育を実現するためには，国策として数年に亘って大学数学基礎教育に予算を重点化し，OD 等を採用することによって段階的に大学数学教員を 2 割程度増やしていく施策が必要になると思われる．

４．今後の課題について

数十年前，筆者が教養の学生の頃は微分積分の教科書で今回資料 1 で挙げたような項目を殆ど網羅した教科書がまだ書店に並んでいたように記憶している．この稿を書くにあたって，図書館で数十年前の「微分積分学」や「応用数学」と題した書物を眺めてみたが，どれも内容に優れ著者の気概が感じられる立派な教科書が多い．冒頭にも書いたが，戦後大学が エリート → マス → ユニバーサル と変遷するにつれて，授業時間数が固定された中で応用や証明が省かれて内容が希薄になって来たのだろう．その頃から公理主義的な現代数学の考え方から，研究のみならず教育の分野においても応用から切り離したコンパクト・ミニマムな記述が浸透してしまったのだろうか．一方，アメリカでは現代数学の良い面を取り入れながらも，教育内容は依然として伝統的な応用を重視した姿勢を崩していない．教育を国力と結び付けて考える国なのであろう．最近の日本の競争力の低下と無縁では無い筈である．(我が国の IMD 国際競争力は 1990 年代初頭頃までの 1 位から下降し始め，最近では 30 位近くを低迷している.）日本の場合は，高等教育を国策として研究し統制できる人材が政府機関にも大学にも不足しているのが現状である．数学者がその役割を果たすには，数学の専門があまりに細分化され過ぎて，数学が社会に及ぼす影響について大局的に眺める余裕が持てなくなってきている．いずれにしても我々数学者は数学教育が国家の礎であるという認識を今一度取り戻す必要がある．

これと関連して，教育の質保証の問題がある．種々のレポートによれば，認めたくない事実ではあるが，日本の大卒技術者の基礎学力の低下と共に，海外の大卒技術者との間に厳然とした能力の差が見られるようになった(例えば[8]を参照). 本稿で説明した学習カリキュラムの差に相応して平均的技術者の器が小さくなっていることは事実であろう．また，今回新しい教科書を用意したとしても，一部の大学または教員によってはフリーパスに近いような評価法を放置すれば，結局同じことになりはしないかという懸念がある．アメリカの場合は工学部の卒業生がどの程度の数学力があるか大体想定できるが，日本の場合はそういう基準が全く見えない．国全体で教科内容がほぼ統一されて基準がオープンな国とそうでない国の違いかもしれない．大学における学生及び教員も含めた成績評価に関するモラルの問題は，我が国の大学教育全体として取り組むべき課題である．現在のグローバル化した社会では国際的に活躍できる人材の育成が急務である．真の実力を養成し，教育の質保証を確立しなければ国際的な信用を取り戻すことは出来ない.

我々の教育改善への取り組みはようやく第一歩を踏み出したに過ぎない．この様な大部の教科書を作成するのは難事業であることが予想されるが，上に述べたような問題点を克服する為に少しでも役立つことが出来ればと願うばかりである．幸いにも，現行の大学カリキュラムを見直し，大学力を強化する政策も打ち出され始めたように見える．この機を逸することなく，政府・文科省に対して大学数学基礎教育に予算を重点化し，OD 等の若い数学者を正規教員として，より多く採用することを提言していきたい．若い数学者の研究をサポートし，研究者が増えることで数学会も活性化されていくだろう．大学数学基礎教育の充実に向けて数学会全体が一丸となって改善に取り組んで頂ける事を切に希望します.

文献

[1]「工学系数学基礎教育改善のための要望書」，第 15 回工学系数学基礎教育研究会資料，九州大学，2012 年 9 月.

[2] Robert Ellis & Denny Gulick, *Calculus,* 6th ed., Custom Pub. Co. 2003.

[3] James Stewart, *Calculus ―Early Transcendentals,* 7th ed., Brooks/Cole Publ. Co, 2010.

[4] Ron Larson & Bruce H. Edwards, *Calculus*, 10th ed., Brooks/Cole Publ. Co., 2013.

[5] Ronald G. Douglas (ed.), *Toward a Lean and lively Calculus*, Report on the Tulane Conference on Calculus, Math. Assoc. of America, Washington DC, 1987.

[6] Deborah H. Hallett & Andrew M. Gleason, *Calculus: Single and Multivariable,* 6th ed., International Student Version, Wiley, 2013.

[7] Robin Wilson, *"Reform Calculus" has been a disaster, critics charge,* The Chronicle of Higher Education, Feb. 7, 1997, A-12.

[8]「理数系基礎学力の強化とモノづくり人材育成の課題に関する調査研究報告書」理数系グローバル人材育成・教育に関する調査専門部会，日本機械工業連合会，2012 年 3 月.

Contents of “Standard Calculus” （資料１）

Calculus I　(1^{st} semester)

Chapter 1 実数と関数 (Real numbers and functions)

§1.1　数と式による表現

現象の数学的表現，実数，区間，絶対値，平方根，方程式・不等式とその応用
(大学・クラスのレベルによっては Appendix A 1 を用いて追加復習してもよい)

§1.2　関数とグラフ

対応関係による関数の定義，定義域・値域，対称性，平行移動による多項式関数，絶対値関数，有理関数，無理関数，2 次曲線等のグラフとその応用

§1.3　関数の演算

関数の和・差・積・商，合成関数・逆関数（厳密に）とその応用

§1.4　指数関数と対数関数

べき関数の逆関数として累乗根の定義，有理指数，指数関数への拡張，その逆関数としての対数関数，双曲線関数とその逆関数，及びそれらの応用（大学・クラスのレベルによっては Appendix B を用いて追加復習してもよい）

§1.5　三角関数と逆三角関数

弧度法と三角関数の復習，$\sec, \csc, \cot$ の導入，逆三角関数の定義とその応用
(大学・クラスのレベルによっては Appendix C を用いて追加復習してもよい)

Chapter 2 極限と連続 (Limits and continuity)

§2.1　関数の極限

自由落体の瞬間速度と関数の接線の考察から極限の概念を導入，関数の極限の定義，ε - δ 式定義の考え方，不定形の極限

§2.2　極限の性質

極限定理（関数の和・差・積・商・合成関数の極限：詳しい証明は Appendix E)，有理関数・無理関数の極限，はさみうちの原理とその応用（特に三角関数の極限）

§2.3　連続関数とその性質

片側極限，連続関数の定義，連続関数の演算，逆関数の連続性，不連続な関数の極，中間値の定理，最大値・最小値の定理，一様連続性（詳しい証明は Appendix D)

Chapter 3 微分法の概念 (Concepts of differentiation)

§3.1　微分係数，導関数

速度の概念，微分係数の定義，導関数，基本的な関数（$x^\alpha, \sin x, \cos x, e^x$ etc）の導関数

§3.2　関数の演算と導関数

和・差・積・商・合成関数の導関数（Chain Rule）（有理関数，無理関数，三角関数，指数関数及びそれらの合成関数の導関数）

§3.3　逆関数の導関数

対数関数の導関数，対数微分法，逆三角関数，逆双曲線関数の導関数

§3.4　高次導関数，陰関数の導関数

加速度と 2 次導関数，n 次導関数，関係式によって定義された陰関数の導関数とその応用

Chapter 4 微分法の応用（Applications of differentiation）

§4.1　平均値の定理とその応用

関数の極値，平均値の定理，単調増加・減少，極値の判定条件

§4.2　グラフへの応用

グラフの凹凸，無限遠での極限，ロピタルの定理，グラフの作図

§4.3　最大・最小問題への応用

いろいろな最大・最小問題への応用（経済を含む）

§4.4　近似式

線形近似，微分(differential)，誤差，関数の近似値，ニュートンの近似法

Chapter 5 積分法の概念（Concepts of integration）

§5.1　不定積分

微分: 位置→速度→加速度 の逆演算として不定積分の導入，不定積分の性質，微分公式から導かれる不定積分公式

§5.2　いろいろな関数の不定積分

$\int f(ax+b)\,dx$ の形の不定積分（置換積分の考え方からの説明も可），有理関数（部分分数分解），無理関数（有理化），三角関数（半角，積・和の公式）等の不定積分

§5.3　定積分

等加速度運動の移動距離の区分求積法による計算，リーマン和，定積分の定義，微分積分学の基本定理，定積分の性質

§5.4　いろいろな関数の定積分

§5.1・§5.2 で扱った関数の定積分とその応用（面積等）

Calculus II　(2nd semester)

Chapter 6 いろいろな積分法 (Techniques of integration)

§6.1　置換積分

置換積分，$\int \sin^m x \cos^n x\,dx, \int \tan^m x \sec^n x\,dx$，$\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含む積分等

§6.2　部分積分

部分積分，$\int \sin^n x\,dx, \int \cos^n x\,dx$，$\int \tan^n x\,dx, \int \sec^n x\,dx$　の漸化式等

§6.3　広義積分

非有界関数の広義積分，無限区間の広義積分，台形公式，シンプソンの公式

Chapter 7 積分法の応用 (Applications of integration)

§7.1　面積と体積

曲線によって囲まれた面積，立体の体積（Cross-section method, Shell method）の公式の区分求積法による導出と例

§7.2　曲線の長さと回転体の表面積

曲線の長さ，回転体の側面積の公式の区分求積法による導出と例

§7.3　モーメントと重心

質点系のモーメントと重心，平面図形，回転体，曲線のモーメントと重心

§7.4　いろいろな応用

力がする仕事，位置エネルギー，液体を汲み出す仕事，経済学や生物学への応用，統計における平均と分散，その他細分と集積の手法の適用例を学習する．

Chapter 8 数列と級数 (Sequences and series)

§8.1　数列と級数

数列の収束・発散，Cauchy の収束定理，いろいろな数列の極限，有界単調列の収束性，級数の収束・発散，等比級数，その他の級数，

§8.2　級数の収束判定

比較定理，積分の応用，正項級数の ratio test，root test，交項級数，絶対収束

§8.3　べき級数とテイラー展開

べき級数，収束半径，テーラー展開，多項式近似，項別微分，項別積分

§8.4　関数列*

関数列の収束，フーリエ級数の紹介，一様収束と連続性，極限と微分・積分の順序交換

Chapter 9 微分方程式入門 (Introduction to differential equations)

§9.1　変数分離形

変数分離形，指数関数的増加・減少，抑制と飽和，運動方程式（雨粒の運動等）への応用，（同次形）

§9.2　1 階線形微分方程式

積分因子/定数変化法による解法とその電気回路等への応用

§9.3　2 階同次線形微分方程式

オイラーの公式，特性方程式，単振動，減衰振動

§9.4　2 階非同次線形微分方程式

特殊解の求め方，強制振動，共振とそれらの力学・電気回路等への応用

§9.5　級数を用いた解法*

1 階・2 階微分方程式へのいくつかの適用例，エルミートの微分方程式

Chapter 10 平面曲線と極座標 (Curves in the plane and polar coordinates)

§10.1　媒介変数表示された平面曲線

媒介変数表示された平面曲線，2 次元ベクトル値関数の微分，2 次元運動の速度，運動方程式の解，放物運動，円運動等

§10.2　曲線の長さ，面積，体積，表面積

媒介変数表示された平面曲線の長さ，面積，回転体の体積，表面積

§10.3　極座標系

極座標系における平面曲線，曲線の長さ，面積

§10.4　2 次曲線

2 次曲線（楕円，双曲線，放物線），座標系の回転，極表示，（ケプラー運動）

Calculus III　(3rd semester)

Chapter 11 空間曲線と曲面 (Curves and surfaces in the space)

§11.1　空間ベクトルの演算

3 次元ベクトルの内積，外積，行列式，力のモーメント，角運動量等への応用

§11.2　空間の直線と平面

3 次元空間内の直線と平面の方程式

§11.3　3 次元ベクトル値関数

3 次元ベクトル値関数の微分・積分，速度・加速度ベクトル，3 次元運動への応用，ケプラー運動

§11.4　空間曲線の長さ，曲率

空間曲線の長さ，接線，法線，曲率

§11.5　2 次曲面と円柱座標系，球面座標系

空間における 2 次曲面（楕円面，楕円放物面，楕円双曲面等），円柱座標系，球面座標系における曲面

Chapter 12 偏微分 (Partial derivatives)

§12.1　多変数関数の極限と連続

多変数関数の定義と例，多変数関数の極限と連続

§12.2　偏導関数

偏微分係数，偏導関数，高階の偏導関数，調和関数，ポテンシャル，熱力学への応用

§12.3　全微分可能性と合成関数の偏微分

全微分可能性，多変数合成関数の偏微分（Chain rule）

§12.4　接平面とテイラー展開

方向微分，grad，接平面，テイラーの定理

§12.5　多変数関数の極値

多変数関数の極値，条件付き極値，ラグランジュの乗数

§12.6　陰関数の微分法と極値*

陰関数の微分法，陰関数の極値

Chapter 13 重積分 (Multiple integration)

§13.1　2 重積分

2 重積分の定義，矩形上の累次積分，一般領域上の累次積分

§13.2　積分変数変換

変数変換（置換積分），極座標系での 2 重積分，広義積分

§13.3　体積，曲面積，重心への応用

2 変数関数で定義された体積と曲面積，モーメントと重心

§13.4　3 重積分と円柱座標系，球面座標系

3 重積分，円柱座標系・球面座標系における 3 重積分

Chapter 14 ベクトル解析 (Vector analysis)

§14.1　ベクトル場

ベクトル場，ポテンシャルと保存場，ベクトル場の div と rot

§14.2　線積分と保存場

経路積分と保存場の関係，完全形微分方程式，力学的エネルギー保存則

§14.3　グリーンの定理

グリーンの定理，具体的計算例

§14.4　面積分

スカラー場の面積分，ベクトル場の面積分

§14.5　発散定理とストークスの定理

発散定理（ガウスの定理），ストークスの定理，それらの電磁気学や流体力学への応用

応用プロジェクト実例集

物理・化学系から工学系の諸分野の専門課程の学習につながる研究課題の実例集（別冊にする可能性あり）

付章（Appendixes）

A　代数的準備

A1 実数の四則演算，順序，等式・不等式，絶対値，因数分解，因数定理

A2 複素数の四則演算，絶対値，極分解，極形式表示

B　指数関数・対数関数の復習

B1 指数法則等諸公式の導出，指数方程式・不等式，グラフ

B2 対数法則等諸公式の導出，対数方程式・不等式，グラフ

C　三角関数の復習

C1 三角比，弧度法，三角関数の諸公式の導出，三角方程式・不等式，グラフ

C2 加法定理，倍角・半角の公式，積和・和積の公式，三角関数の合成

D　実数の位相

上限の公理，Bolzano-Weierstrass の定理，Cauchy の収束定理，中間値の定理，最大・最小値の定理，一様連続性定理，etc.

E　本文中で省略された定理の証明

極限定理（積，商，合成関数），逆関数の連続性に関する定理，リーマン和の細分に関する収束定理，etc.

F　数学計算ソフトの解説

Mathematica　etc.

G　微分・積分の公式集

新しい教科書の使用例（資料２）

この教科書案は米国をはじめ世界の多くの大学で採用されているカリキュラムを参考に，我が国の環境に適応するようにグローバルスタンダードな “Calculus” コースとして作成した．授業時間数は標準で 90 分の授業を週 2 コマ×16 週で 1 学期として 3 学期間のコースである．（ただし，米国の 50 分授業＝日本の 1 コマの 1/2 (=45 分)に換算した為，日本の方が 1 学期間で 320 分少ない.）米国では入学時点において学力が不十分な学生に対しては先ず “Pre-calculus” を履修し合格することを履修条件として課し，履修者の学力を整えていることもあって，トップスクールからコミュニティーカレッジに至るまでほぼ一律にこのカリキュラムが採用されている．一方，我が国の場合は大学入学者選抜形式によって入学生の学力に差があり，現時点では「基礎数学」を正規科目として用意して合格を履修条件としている大学は少ない為，ここでは大学またはクラスを入学時における学力に応じて，「カテゴリーA」,「カテゴリーB」,「カテゴリーC」の 3 つのカテゴリーに分けて，それぞれのクラス毎に使用例を提案する．（それぞれのカテゴリーの定義については本文を参照）以下において，各§の内容がほぼ 1 コマの授業に対応すると考えて良い．（ただし，中には 1 コマで講義出来ない内容の§も含まれているが演習や予備の時間での調節が可能.）

（１）カテゴリーＡの大学またはクラス

このレベルの学生は高校数学の基礎が出来ている為，Chapter 1 の大部分が省略でき，また微分方程式やベクトル解析が必修科目として用意されているので，これらを除いた内容を 2 学期間で学習することが可能である．（ただし，変数分離形は学習する.）

1st 学期 Calculus Ia（1 変数微分積分）

講義・・・Chapter 1 について 2 コマ（大学数学の記法，関数・合成関数・逆関数等の厳密な取り扱い，双曲線関数，逆三角関数等の高校では学習しなかった題材を中心に講義する）
Chapter 2 §2.1～§2.3
Chapter 3 §3.1～§3.4
Chapter 4 §4.1～§4.4
Chapter 5 §5.1～§5.4
Chapter 6 §6.1～§6.3
Chapter 7 §7.1～§7.4
計 24 コマ

演習・・・各 Chapter 毎に 1 回，計 6 コマ

試験・・・1 コマ

予備・・・1 コマ

合計・・・32 コマ

2^{nd} 学期 Calculus IIa（級数と多変数微分積分）

講義・・・Chapter 8 §8.1～§8.4
Chapter 9 §9.1
Chapter 10 §10.1～§10.4
Chapter 11 §11.1～§11.5
Chapter 12 §12.1～§12.6
Chapter 13 §13.1～§13.4
計 24 コマ

演習・・・各 Chapter 毎に 1 回，計 6 コマ

試験・・・1 コマ

予備・・・1 コマ

合計・・・32 コマ

（２）カテゴリーＢの大学またはクラス

このクラスではこの教科書通りのグローバルスタンダードなカリキュラムで教えることを勧める.

1^{st} 学期 Calculus I

講義・・・Chapter 1 §1.1～§1.5
Chapter 2 §2.1～§2.3
Chapter 3 §3.1～§3.4
Chapter 4 §4.1～§4.4
Chapter 5 §5.1～§5.4
計 20 コマ

演習・・・講義 3 回毎に 1 回，計 7 コマ

応用プロジェクト（専門教育との関連）・・・2 コマ

試験・・・2 コマ（中間試験＋期末試験）

予備・・・1 コマ

合計・・・32 コマ

2^{nd} 学期 Calculus II

講義・・・Chapter 6 §6.1～§6.3
Chapter 7 §7.1～§7.4
Chapter 8 §8.1～§8.4
Chapter 9 §9.1～§9.5
Chapter 10 §10.1～§10.4
計 20 コマ

演習・・・講義３回毎に１回，計７コマ
応用プロジェクト（専門教育との関連）・・・２コマ
試験・・・２コマ（中間試験＋期末試験）
予備・・・１コマ
合計・・・32 コマ

3rd 学期 Calculus III
講義・・・Chapter 11 §11.1～§11.5
Chapter 12 §12.1～§12.6
Chapter 13 §13.1～§13.4
Chapter 14 §14.1～§14.5
計 20 コマ
演習・・・講義３回毎に１回，計７コマ
応用プロジェクト（専門教育との関連）・・・２コマ
試験・・・２コマ（中間試験＋期末試験）
予備・・・１コマ
合計・・・32 コマ

（３）カテゴリーＣの大学またはクラス

このカテゴリーの大学またはクラスでは推薦入学者の比率が高く，Chapter 1 において基礎数学の復習を数コマ追加する必要がある．（さらに，プレースメントテストの成績が下位の学生については最初に「基礎数学」を学習してからこのコースを学習することを勧める．）従って，最初の学期は「微分とその応用」を Calculus Ic，2 学期目は「積分とその応用」を Calculus IIc として学習し，3 学期目は専攻によっては必修科目として Calculus III を学習するか，またはベクトル解析の知識を必要としない専攻では積分定理を除いた部分を Calculus IIIc として学習することができる．Calculus IIIc を標準に設定する場合は，別に「ベクトル解析」を選択科目として用意する必要があるだろう．

1st 学期 Calculus Ic（微分とその応用）
講義・・・Chapter 1 §1.1～§1.5＋Appendix B&C（4 コマ）
Chapter 2 §2.1～§2.3
Chapter 3 §3.1～§3.4
Chapter 4 §4.1～§4.4
計 20 コマ
演習・・・講義３回毎に１回，計７コマ
応用プロジェクト（専門教育との関連）・・・２コマ
試験・・・２コマ（中間試験＋期末試験）

予備・・・1 コマ
合計・・・32 コマ

2nd 学期 Calculus IIc（積分とその応用）

講義・・・Chapter 5 §5.1～§5.4
Chapter 6 §6.1～§6.3
Chapter 7 §7.1～§7.4
Chapter 8 §8.1～§8.3（§8.4 を除く）
Chapter 9 §9.1～§9.4（§9.5 を除く）
Chapter 10 §10.1～§10.2（§10.3～§10.5 を除く）
計 20 コマ

演習・・・講義 3 回毎に 1 回，計 7 コマ
応用プロジェクト（専門教育との関連）・・・2 コマ
試験・・・2 コマ（中間試験＋期末試験）
予備・・・1 コマ
合計・・・32 コマ

3rd 学期 Calculus III
または Calculus IIIc（多変数微分積分）

講義・・・Chapter 11 §11.1～§11.4，§10.3，§10.4，§11.5
Chapter 12 §12.1～§12.6
Chapter 13 §13.1～§13.4
Chapter 14 §14.1，§14.2，積分定理概説（1 コマ）
計 20 コマ

演習・・・講義 3 回毎に 1 回，計 7 コマ
応用プロジェクト（専門教育との関連）・・・2 コマ
試験・・・2 コマ（中間試験＋期末試験）
予備・・・1 コマ
合計・・・32 コマ

（注）微分方程式については Chapter 9 で必要最小限の項目を学習するが，各大学で用意されている選択（または必修）科目の「微分方程式」を履修することが望ましい．「微分方程式」では理論的な展開が主となる為，Chapter 9 で取り上げるような基本的な応用例は全ての理系の学生に必修の内容でありながら，これらについて学習する時間的な余裕は殆どないのが現状である．

新しい工学系数学教育カリキュラム（資料３）

国際標準テキスト“Standard Calculus”に基づいた教育に移行した場合の標準的な工学系数学教育カリキュラムをそれぞれの大学カテゴリー（A，B，C）ごとに提案する．ここでは殆ど全ての工学専門課程に共通で工学系数学統一試験（EMaT）の出題範囲である「1変数微分積分」,「多変数微分積分」,「線形代数」,「微分方程式」,「確率統計」および Calculus の一部である「ベクトル解析」を必修科目とし，その他「フーリエ解析（＋ラプラス変換）」,「複素解析」を選択科目とした場合に絞って考察する．

（１）カテゴリーＡの大学

新課程

<table>
<tr><th>１年前期</th><th>１年後期</th><th>２年前期</th><th>２年後期</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Calculus Ia
(1 変数微積分)</td><td rowspan="2">Calculus IIa
(多変数微積分)</td><td>微分方程式</td><td>フーリエ解析</td></tr>
<tr><td>ベクトル解析</td><td>複素解析</td></tr>
<tr><td>線形代数 I</td><td>線形代数 II</td><td>確率統計</td><td></td></tr>
</table>

現課程（カテゴリーA の大学）の平均

１年前期	１年後期	２年前期	２年後期	３年前期
1 変数微積分	多変数微積分	微分方程式	フーリエ解析	複素解析
線形代数 I	線形代数 II	確率統計	ベクトル解析	

従って，9 コマ ⇒ 11 コマ，即ち <u>2 コマ（22%）増</u> となって新課程に移行した場合，A クラスの大学では約 2 割程度の数学基礎教育担当教員が不足する．

（２）カテゴリーＢの大学

新課程

<table>
<tr><th>１年前期</th><th>１年後期</th><th>２年前期</th><th>２年後期</th><th>３年前期</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Calculus I</td><td rowspan="2">Calculus II</td><td rowspan="2">Calculus III</td><td>微分方程式</td><td>複素解析</td></tr>
<tr><td>フーリエ解析</td><td></td></tr>
<tr><td>線形代数 I</td><td>線形代数 II</td><td>確率統計</td><td></td><td></td></tr>
</table>

現課程（カテゴリーB の大学）の平均

１年前期	１年後期	２年前期	２年後期	３年前期
1 変数微積分	多変数微積分	微分方程式	フーリエ解析	複素解析
線形代数 I	線形代数 II	確率統計	ベクトル解析	

従って，9 コマ ⇒ 12 コマ，即ち 3 コマ（33%）増 となって約 3 割の数学基礎教育担当教員が不足するが，そのうちの 1 割は数学教員組織の再編もしくは各教員の担当コマ数増によって補うとすれば，これも 2 割程度の数学担当教員増が必要である．

（3）カテゴリーＣの大学

新課程（Calculus III を採用した場合）

<table>
<tr><th>1 年前期</th><th>1 年後期</th><th>2 年前期</th><th>2 年後期</th><th>3 年前期</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Calculus Ic
(微分と応用)</td><td rowspan="2">Calculus IIc
(積分と応用)</td><td rowspan="2">Calculus III</td><td>微分方程式</td><td>複素解析</td></tr>
<tr><td>フーリエ解析</td><td></td></tr>
<tr><td>線形代数 I</td><td>線形代数 II</td><td>確率統計</td><td></td><td></td></tr>
</table>

新課程（Calculus IIIc を採用した場合）

<table>
<tr><th>1 年前期</th><th>1 年後期</th><th>2 年前期</th><th>2 年後期</th><th>3 年前期</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Calculus Ic
(微分と応用)</td><td rowspan="2">Calculus IIc
(積分と応用)</td><td rowspan="2">Calculus IIIc
(多変数微積分)</td><td>微分方程式</td><td>複素解析</td></tr>
<tr><td>フーリエ解析</td><td>ベクトル解析</td></tr>
<tr><td>線形代数 I</td><td>線形代数 II</td><td>確率統計</td><td></td><td></td></tr>
</table>

現課程（カテゴリーＣの大学）の平均

<table>
<tr><th>1 年前期</th><th>1 年後期</th><th>2 年前期</th><th>2 年後期</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2">1 変数微積分</td><td rowspan="2">多変数微積分</td><td>微分方程式</td><td>ベクトル解析</td><td>複素解析</td></tr>
<tr><td>確率統計</td><td>フーリエ解析</td><td></td></tr>
<tr><td>線形代数 I</td><td>線形代数 II</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

私立大学では殆どの大学で「微分積分」は既に週 2 コマに移行しているため，11 コマ ⇒ 12～13 コマ，即ち 1～2 コマ（9～18%）増 となる．しかし，このクラスの大学では，今後正規に「基礎数学」（Pre-calculus）をカリキュラムに組み込んでいく必要があることや，現在選択科目が大幅に犠牲になっている大学が多い（「ベクトル解析」を開講している大学は少ない）ことを考慮すれば，これも約 2 割程度の担当教員増が必要であろう．現状でも私立大学の教員はオーバーワークになっていて，本来の大学教員としての教育と研究のバランスのとれた環境を確保する必要がある．

結局，国際標準レベルの大学数学基礎教育を実現するためには各カテゴリーの大学とも約 2 割程度の数学担当教員の増員が必要であることが見て取れる．

以上