

書 評

リッチフローと幾何化予想

小林亮一 著，培風館数理解物理学シリーズ 5，2011 年

大阪大学大学院理学研究科 満潤俊樹

「 n 次元球面 S^n にホモトピー同値な閉多様体は S^n に同相であろう」という n 次元ポアンカレ予想は、歴史的には $n \geq 5$ のときスメイル， $n = 4$ のときフリードマンによって肯定的に解決されました。 $n = 3$ の場合には 1970 年代後半になって、サーストンが幾何化という新たな概念を導入することにより「3次元閉多様体は 8 種類の幾何構造をもつピースに標準的に分解されるであろう」という幾何化予想を提唱し、3次元ポアンカレ予想をも包摂する新たな枠組みが提出されました。さらに 2003 年ころにペレルマンは、ハミルトンによるリッチフローの研究をさらに発展させる形で、このサーストンの幾何化予想を解決し、その系として 3次元ポアンカレ予想を肯定的に解決しました：

[P1] G.Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv: math/0211159.

[P2] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv: math/0303109.

[P3] ———, *Finite extinction time for the solution to the Ricci flow on certain three manifolds*, arXiv: math/0307245.

本書は、上記 3 編の論文とクライナー・ロットによる記事 B.Kleiner & J.Lot, *Notes on Perelman*, arXiv: math/0605667 を参考に、ペレルマンによる幾何化予想解決の詳細を丁寧に解説したものです。内容的には、リッチフローの基礎理論から始めて幾何化予想の解決に至るまで、研究者を志す大学院生やある程度の予備知識をもつ数学者を念頭に書かれたハイレベルのテキストで、本書のあちこちに著者の創意と工夫が垣間見えます。序文で著者も強調しているように、上記 3 編の原論文を手元におき比較対照しながら本書を読むことが最もお勧めです。以下ではその内容を詳しく見ていこうと思います。

第 0 章で、サーストンの幾何化予想、ハミルトンによるリッチフローの研究、さらにはペレルマンのアプローチを俯瞰したあと、Part I (第 1 章から 9 章まで) では、ハ

ミルトン・ペレルマンによるリッチフローの方法の全容が明かされます。さらに Part II (第10章から18章まで) では、Part I で準備した種々の道具が幾何化予想をいかに解決に導くかを詳細に述べています。

3次元リッチフローで初期計量を変形していくとき、有限時間 $t = T$ で特異性が現れるとします。 T に至る時刻の列 $\{t_i\}$ を適当にとり、各時刻で曲率が大きい点を選んで曲率の大きさを用いてリッチフロー解をリスケールした極限をハミルトンは考察しました。(このようなリスケール解の列の極限では、定義される時間区間が無限大に伸びる可能性があります。過去に無限に伸びた時間区間 $(-\infty, T]$ で定義されたリッチフロー解は古代解とよばれています。) 彼はハルナック不等式に基づいて、特異点が現れる直前の曲率が大きい点の近傍は標準的な構造を持つことを予想したのですが、さらに特異点に潰れて行く部分の周辺を手術で切り離します。こうした操作の繰り返しにより、ハミルトンは手術つきリッチフローというものを考え、有限時間で解が消滅する場合を除けば、リッチフローが時間無限大まで延長して最終的には標準的なものになることを予想しました。

リスケール解の列の収束を示すには、コンパクト性定理 R.S.Hamilton, *A compactness property for solutions of the Ricci flow*, Amer.J.Math., 117 (1995), 545—572, を用いるため、単射半径の下からの評価と曲率の一樣有界性が必要となります。この困難性を解決したのがペレルマンの局所非崩壊定理 (第4章) やその伝播型 (第6章) ですが、彼はこれらを示す過程で w エントロピー (第4章) や L 幾何 (第5章) などの重要な概念を導入しました。さらにリッチフロー解の特異点の解析は、非負曲率作用素をもち κ 非崩壊な古代解である κ 解の構造を理解することに帰着され (第7章)、ペレルマンによる3次元 κ 解の構造定理 (第8章) やその分類 (第11章) が基本的役割を果たします。一方、特異点が現れる直前での曲率が大きい点の近傍は標準的な構造を持つ (ある κ 解の対応する部分集合によって ε 近似される) というペレルマンによる3次元リッチフローの標準近傍定理 (第9章) も問題解決の重要な鍵でした。

第12章及び第13章は手術つきリッチフローに必要な基礎的事項の説明にあてられ、第14章及び第15章では「ピンチング条件」や「標準近傍条件」をみたす手術つきリッチフローとして、カットオフつきリッチフローという概念が定式化されます。リッチフローを走らせた場合に、特異点が生じるごとに標準的な方法で手術を行うことにより、カットオフつきリッチフロー解が (消滅しない限り) 時間無限大まで延長します。そして第16章と第17章で、カットオフつきリッチフロー解の長時間における振舞いを調べることで、幾何化予想の肯定的解決が得られます (定理 17.5.9) :

すなわち、任意の3次元閉多様体 M 上に初期計量を与えてカットオフつきリッチフローを走らせると、以下の2つの場合が起こります。

(Case 1) 有限時間ですべての連結成分のスカラー曲率が非負に成る場合；

(Case 2) スカラー曲率が負の領域がいつまでも残る場合.

上の Case 1 の場合には、スカラー曲率が零になる連結成分と、スカラー曲率がどこかで正になる連結成分の連結和になりますが、後者の連結成分上ではカットオフつきリッチフローの生存時間は有限となります。この場合は M はいくつかの平坦閉多様体、いくつかの $S^1 \times S^2$ と、いくつかの標準球面 S^3 の計量商の連結和に微分同相となります。一方 Case 2 の場合には、カットオフつきリッチフローは時間無限大まで延長され、 M には広部-狭部分解がおこり、狭部（体積崩壊する部分）はグラフ多様体に微分同相です。（[P2] 及び 塩谷-山口：*Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound*, *Math. Ann.* 333 (2005), 131—155 参照.）一方広部は、適当なスケーリングの後、いくつかの閉双曲多様体または体積有限完備双曲多様体（のカスプを切り落としたもの）に点つき幾何収束します。そして M は狭部と広部を非圧縮的トーラスに沿って貼り合わせたものに微分同相となります。

ただしカットオフつきリッチフローにおいて手術は有限時間では高々有限回であるが、時間大域的には狭部において手術が無限回起きている可能性を排除できない。このような状況であっても、トポロジ的に意味のある連結和分解は有限回で終了していて、幾何化予想の結論には影響しません（注意 17.5.8；J.W.Morgan & G.Tian, *Completion of the proof of the Geometrization Conjecture*, arXiv: math/0809.4040）.