# ネズミ算って知ってる？

## — 等比数列と指数関数 —

（2011 年 10 月 26 日　藤岡おもしろ数学教室）

東京大学大学院数理科学研究科　宮岡洋一

### 1. 等比数列とべき乗

**ネズミ算**は『塵劫記』（1627 年）という昔の数学書に載っている問題です.

**問題**　正月に父ネズミと母ネズミが出て，子供を１２匹（オスが６匹，メスを６匹）生みます．親と子と合わせて７つがい，１４匹になります．二月になると，親も子供も１つがいにつき１２匹ずつ生むので，全部で９８匹になります．このように，月に１度ずつ，親，子，孫，ひ孫，とみな１つがいにつき１２匹ずつ生むとき，翌年の正月には全部で何匹になるでしょう.

**解答**　$27,682,574,402 = 2\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$ 匹

どうしてこのような解答になるのでしょうか？

次の月のネズミの数は，前の月の数の７倍になります．１月：2，２月 $2\times7$，３月 $2\times7\times7$，... ですね.（次の数字が，前の数字の一定倍となっているような数字の列を，**等比数列**といいいます．１ヶ月ごとに増えていくネズミの数は，等比数列です）．だから，１２ヶ月経ったときの数は，最初の数２に，７を１２回かけたものになるのです.

ところで，同じ数をたくさんかけあわせるとき，たとえば　２を 100 回かけるとき，２を 100 個，乗法の記号 $\times$ を 99 個書くのは面倒です．そこで

$$2^{100}$$

のように表し,「２の 100 乗」のように読みます（英語では two to the hundred と言います）．一般に $n$ という数を何度もかけた数，$n, n^2, n^3, \ldots$ を $n$ の**べき乗**といいます.

たとえば10の１乗，２乗，... （10のべき乗）を調べてみると，

$$\begin{aligned}10^1 &= 10\\ 10^2 &= 10\times 10 = 100\\ 10^3 &= 10\times 10\times 10 = 1000\\ &\cdots\\ 10^{12} &= 1,000,000,000,000\end{aligned}$$

ですね．また２のべき乗は，

$$\begin{aligned}2^1 &= 2\\ 2^2 &= 2\times 2 = 4\\ 2^3 &= 2\times 2\times 2 = 8\\ &\cdots\\ 2^{10} &= 1024\end{aligned}$$

となります．この書き方を使うと，さきほどのネズミ算の答は $2\times 7^{12}$ ですね．等比数列は，べき乗を使うと，$a, aq, aq^2, \ldots$ のように書き表すことができます．さっきのネズミ算だったら，$2, 2\times 7, 2\times 7^2, \ldots$ となるわけですね．

10のべき乗は，物理などで，大きな数字を表すときによくつかわれます．

- １リットルの水は，約 $3\times 10^{25}$ 個の分子
- 地球の質量： 約 $7\times 10^{21}$ t
- 光が１年間に進む距離 １光年：約 $10^{13}$ km
- 宇宙の大きさは約 500 億光年 $= 5\times 10^{23}$ km

２のべき乗は，コンピュータや情報理論でよく使われています．

ところで先に見たように，$2^{10} = 1024$ はほぼ $1000 = 10^3$ です．この事実は，たとえば地震のマグニチュード（正確にはリヒター・スケール）を決めるときに用いられています．実際，マグニチュードは次のように定められています．

- マグニチュードが 0.2 あがると，地震のエネルギーは２倍になる．マグニチュードが２あがると，エネルギーは $2^{10}$ 倍, つまり約 1000 倍になる．

そこで練習問題です．

**問題**　東日本大震災 (M 9.0) のエネルギーは，関東大震災 (M 7.9) のエネルギーの約何倍でしょうか？また想定されていた最大規模 M 8.4 の何倍でしょうか？

べき乗の性質は，なれないとちょっとつかみにくいところがあります．わかりにくさを逆手に取って，権力者にぎゃふんといわせた話が伝わっています．

昔，豊臣秀吉に仕えた御伽衆に，曽呂利新左衛門という人がいました．面白いことを言って主人を喜ばせるのが仕事です．ある日新左衛門の言葉にすっかり機嫌がよくなった秀吉は，望むものを何でもやろう，と言い出しました．そこで新左衛門は，褒美として最初の日は米１粒，２日目は２倍の２粒，３日目はさらに２倍の４粒，と日ごとに２倍の量の米粒を，１００日間もらうことを望みました．秀吉はなんだそんなことか，と簡単に承知したのですが，さてじっさいに計算してみると，

| | | |
|---|---|---|
| １日目 | 1 粒 | （約 0.02g） |
| ２日目 | $2$ | |
| ３日目 | $2 \times 2 = 2^2 = 4$ | |
| ４日目 | $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ | |
| $\cdots$ | | |
| １１日目 | $2^{10} = 1,024$ | （約 20g） |
| ２１日目 | $2^{20} = 1,048,576$ | （約 21kg） |
| ３１日目 | $2^{30} = 1,073,643,872$ | （約 22t） |
| ４１日目 | $2^{40}$ | （約 22,000 t） |

と，とんでもないことになることに家来が気づき，あわてて願いを取り消してもらったそうです．この調子で最終日まで計算を続けたとすると，100 日目には，米は $2^{99}$ 粒．重さに換算すると，約 $10^{22}$ t で，地球全体よりも重くなってしまうのです．

日常生活で等比数列やべき乗が出てくるのは，利息計算です．

お金を借りたり，貸したりして，そのままにしおくと，利息にもまた利息がかかります（複利）．毎年利息分を払っていれば，２年間，３年間と借りても払う利息は１年の利息の２倍，３倍ですが，借りっ放しだと，利息分にも利息がつくので，返さなければならない金額は，もっと大きくなるわけです．

年利 １０ ％ で１０万円借金すると，７年後の借金は，$(1.1)^7 = 1.9487...$ 倍になり，８年後では $(1.1)^8 = 2.1435...$ 倍となる．払う利息は，７年間で約 95%，８年間で約 114% ですね．１年あたりの平均利息では，それぞれ約 12%，14% です．

**問題**　７年半で１万円の借金が２倍の２万円になるとして，３０年後，７５年後には借金はいくらになるか？１年あたりの平均利息はいくらになるか．

平均利息は，それぞれ 50%, 1364% です．すごい金額ですね.

## 2. 負のべき

正の整数 $n = 1, 2, 3, ...$ に対して $2^n$ を定義しましたが，0や負の整数に対しては，どうなるでしょうか．まずは下の表をよくながめてください．

$$\begin{aligned}
& \cdots \\
2^5 &= 32 \\
2^4 &= 16 \\
2^3 &= 8 \\
2^2 &= 4 \\
2^1 &= 2 \\
2^0 &= ? \\
2^{-1} &= ? \\
2^{-2} &= ? \\
2^{-3} &= ? \\
& \cdots
\end{aligned}$$

? のところには，どんな数字がはいるべきか，考えてください．べき指数が1減ると半分になっていくことを考えると，次のようにするのが自然な感じがします.

$$\begin{aligned}
& \cdots \\
2^3 &= 8 \\
2^2 &= 4 \\
2^1 &= 2 \\
2^0 &= 1 \\
2^{-1} &= \tfrac{1}{2} \\
2^{-2} &= \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2^2} \\
& \cdots
\end{aligned}$$

一般的には，$a$ を正の数，$n$ を正の自然数としたとき

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

と**約束する**ということですね.

単なる約束とはいえ，こういうふうに決めておくと，とてもいいことがあります．べき乗の積に関してよい規則がなりたつことです．詳しく言うと，$m, n$ を整数としたとき，

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad\qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

が $m$ や $n$ が正であろうと，負であろうと，０であろうと必ず成り立つということです．この等式を，べき指数法則，と言います．

この法則を計算で確かめてみましょう（ホワイトボードに，$m, n$ がともに正，ともに負，正と負の場合を書かせて確かめてもらう）．

負のべきを使うと，極端に小さい数字を簡単にあらわすことができます．

- 細菌の大きさ：約 $1\mu = 10^{-3}$mm $= 10^{-6}$m
- 原子の大きさ（半径）：約　0.1 m$\mu = 10^{-10}$m $= 0.0000000001$ m
- 水素の原子核（陽子）の大きさ：約 $10^{-15}$ m
- 水素原子１個の質量：約　$1.6 \times 10^{-24}$ g
- 金の原子一個の質量：約 $3 \times 10^{-22}$ g
- 電子の質量：約 $10^{-27}$ g
- 光が窓ガラスを透過する時間：約 $2 \times 10^{-11}$ 秒

１０のべき乗（正べき，負べき）に関しては，いろいろな単位では，次のような用語が使われています．キロやミリは小学校以来おなじみですが，最近はメガ，ギガ，テラ，ナノなどもよく耳にしますね．

- 10　デカ　　$10^{-1}$　デシ
- $10^2$　ヘクト　　$10^{-2}$　センチ
- $10^3$　キロ　　$10^{-3}$　ミリ
- $10^6$　メガ　　$10^{-6}$　マイクロ
- $10^9$　ギガ　　$10^{-9}$　ナノ
- $10^{12}$　テラ　　$10^{-12}$　ピコ
- $10^{15}$　ペタ　　$10^{-15}$　フェムト

負のべきが使われている例としては，放射性物質の量があります．

放射性物質の原子は不安定で，崩壊するときに放射線を出し，より安定な原子に変わっていきます．一定の期間内に崩壊する原子の割合は，同じ種類の放射性物質なら一定です．一回の崩壊で安定な原子に変わり，もう放射線を出さないと仮定すると，放射線量は，一定の期間内に一定の割合で減っていきます．もと１ g あった放射性物質が１年後に $b$ g まで減ったとすると，２年後には $b^2$ g，３年後には $b^3$ g, ..., $n$ 年後には $b^n$ g になります．

実際には，１年あたりの減少率 $b$ を考える代わりに，もとの半分に減るまでに要する時間（半減期）を使うのがふつうです．セシウム１３７の半減期は約３０年なので，３０年たつと放射能は最初の $2^{-1}$ 倍（1/2 ），６０年で $2^{-2}$ 倍　（1/4），３００ ＝ （半減期）$\times$ 10 年たつと，$2^{-10}$　倍，つまり 約 1/1000 になります．６００ ＝ (半減期）$\times$ 20 年たつと，$2^{-20}$ 倍，約 1/1000000 です.

**3. 分数べき**

１年で１０ ％ の利息がつく銀行預金を半年（ 1/2 年）で解約したとき利息をいくらにしたらよいか，また，半減期３０年のセシウム１３７が，１０年後（半減期の 1/3） にどのくらい減っているか，考えてみましょう.

**利息の場合**

1/2 年を１単位と考えてみましょう．この単位期間の利息が　$x$ ならば，１年間は２単位期間にあたるので，１年間の利息は $(1+x)^2$ となるはずです．これが 1.1 なのですから，$(1+x)^2 = 1.1$ の答を求めればよい．同じようにして $1/n$ 年を１単位と思うと，$1/n$ 年の利息 $x$ は $(1+x)^n = 1.1$ を解けばよいのです.

$b^n = a$ となる $b$ を $\sqrt[n]{a}$ と書き，$a$ の $n$ 乗根といいます．すると，１年の利息が $p$ であるとき，$1/n$ 年間の利息は $\sqrt[n]{1+p} - 1$ とすればよろしい.

それでは，$m/n$ 年間の利息はどうなるでしょうか．答えは $\sqrt[n]{(1+p)^m} - 1$ です.

**放射線の場合**

半減期の　1/3　の期間では，放射性物質は $1/\sqrt[3]{2}$ となります．半減期の $m/n$ 倍の期間では，$1/\sqrt[n]{2^m}$ です.

$\sqrt[n]{a}$ の近似値は，次のようにして求まります.

$x_0$ を $x_0^n > a$ となるようにとります．たとえば，$a > 1$ なら $x_0 = a$ とすれば大丈夫です.

$$x_1 = \frac{(n-1)x_0^n + a}{nx_0^{n-1}}$$
$$x_2 = \frac{(n-1)x_1^n + a}{nx_1^{n-1}}$$

以下同様に $x_3, x_4, x_5, \ldots.$ を求めていくと，これはどんどん $\sqrt[n]{a}$ に近づきます．その理由は次の図からわかります（ホワイトボードに $y = x^n$ のグラ

フと $(x, x^n)$ における接線，接線と $x$ 軸との交点を書いてみせる）．このように，グラフとその接線を使って近似値を求める方法を**ニュートン法**といいます.

例として，$n=2, a=2$，$x_0=2$ としてみましょう.

$$x_1 = \frac{x_0^2+2}{2x_0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{x_1^2+2}{2x_1} = \frac{17}{12} = 1.416\ldots$$

$$x_3 = \frac{x_2^2+2}{2x_2} = \frac{577}{408} = 1.414215\ldots$$

**問題**　$x_4$ を計算して，教科書にある $\sqrt{2}$ の値 $1.4142135623\ldots$ と比べてみましょう.

$x_2, x_3, x_4$ は，小数点以下 ２桁，５桁，１０桁まで合っています．$x_5$ は小数点以下 ２０桁くらいまで，$x_6$ は４０桁くらいまで正しい値と合います.

ニュートン法は，非常に能率的な近似計算です．$y = x^n$ などのように簡単なグラフから出発した場合，コンピュータを使えば，１兆桁くらいまで $\sqrt[n]{m}$ を求めることは簡単にできます．$\pi$ の近似計算はそこまでやさしくはありません.

正の数 $a$ の $n$ 乗根 $\sqrt[n]{a}$ には，次の性質があります.

- $\sqrt[n]{1} = 1$
- $0 < a < b$ なら $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $\sqrt[n]{1/a} = 1/\sqrt[n]{a}$
- $a > 1, m > n$ なら $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

とくに $\sqrt[n]{a^n} = a$ ですね．ここで，$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}, a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ であると約束すると，$a$ の有理数べき $a^q$ （$q = m/n$) が決まります．有理数べきに対しても，べき指数法則

$$\begin{aligned} a^p \times a^q &= a^{p+q} \\ a^{pq} &= (a^p)^q \end{aligned}$$

はなりたちます（ホワイトボードに書いてみせる）.

これまでにやったことをまとめてみましょう．$a$ を正の数とします.

- 有理数 $q = m/n$ に対して $a^q$ が決まる．
- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $a^0 = 1$, $a^{-p} = 1/a^p$
- $a > 1, p > q$ なら $a^p > a^q$.

### 4. 指数関数

$a > 0$ のとき，有理数 $x$ をいろいろ動かして $y = a^x$ のグラフを書いてみましょう．$a = 2$ のときは，こんな具合になります（ホワイトボード）滑らかにつながったグラフですね．$y = a^x$ を指数関数といいます．

$a > 1$ ，たとえば $a = 2$ としてみます．$x = 0$ のときは $y = 1$ ですが， $x$ を大きくしていくと，$y = a^x$ はどんどん大きくなっていきます．逆に $x$ を小さくしていくと $y = a^x$ はだんだん小さくなって，０に近づいていきます．

$x$ を少しだけふやして $x + h$ にしてみると，$a^{x+h} = a^x \times a^h$ ですから，もとの $a^x$ よりも，$a^x \times (a^h - 1)$ だけ増えたことになります．

つまり，$x$ を $h$ だけ増やしたとき，指数関数 $a^x$ の増え方は，$a^x$ に比例しています．

グラフでいえば，$(x, a^x)$ と $(x + h, a^{x+h})$ を結ぶ直線の傾きが，$y$ 座標 $a^x$ に比例している，ということです．

$0 < a < 1$ でも $a^x$ は決まりますが，この場合， $x$ が増加すると，$a^x$ は減少し，$x$ を $x + h$ に増やしたときの $a^x$ の減少分が $a^x$ に比例する，ということになります．

$a = 1/b$ とおくと， $b > 1$ で， $a^x = 1/b^x$ だからです．

$a = 1$ ならば，$a^x$ は常に１です．

さて，利息を受け取る場合，複利で計算したほうが，単利で計算するより得です．利息にも利子がつくからです．

１年間の利率が 10 % で１年間預金するより，半年の利率が 5 % の預金を半年２回，１年間預金したほうが有利ですね．

１年間の利率が $b$ で１年預金すると $1 + b$ 倍になりますが，半年の利率を $b/2$ として，１年間複利で運用すると，

$$\left(1 + \frac{b}{2}\right)^2 = 1 + b + \frac{b^2}{4} > 1 + b$$

倍になります．1/4 年間の利率を $b/4$ として１年後の預金を計算すると，さらに有利になります．期間を $1/n$ 年のときの利息を $b/n$ と設定した場合，$n$ を大きくしていくと，１年後の複利の利息は次第に増えていきます．限度はあるのでしょうか．

年利 $b$ で $x$ 年後の預金が元の金額の何倍になっているか，考えてみましょう．

答えは $a = 1 + b > 1$ として， $a^x$ でした．$x$ 年後から $x + h$ 年後まで，$h$ 年間でお金がいくら増えたかを考えると，$a^x \times (a^h - 1)$ ですね．増えた速さは，増加分を期間 $h$ で割って，

$$a^x \times \frac{a^h - 1}{h}$$

です．つまり，$h$ を一定にとると，増える速さ，つまりグラフの傾きは，$a^x$ に比例するのでした（ホワイトボード）

要するに，利息額は元金に比例するということですね．そこで，利息を元金でわったのが $h$ 年間あたりの利率で， $a^h - 1$ と表されます．これを $h$ で割ると，期間 $h$ 年内の年換算利回りで，

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

と表されます．

$a = 1 + b > 1$, $h = 1/n$ としてみましょう．すると，$h = 1/n$ 年あたりの利率 $a^h - 1$ で１年間複利で運用すれば，当然 $a - 1 = b$ の利率になりますが，単利で１年間運用した場合の利率である年換算利回り $n(a^{1/n} - 1)$ は，当然 $b$ より小さくなります．実は，

$$\frac{b}{a} < n(a^{1/n} - 1) < b$$

が成り立ちます．最初の項は，１年前から今までの利息です．これは，グラフを見ることによってわかります（ホワイトボードに $y = a^x$ のグラフを書き，凸な関数であることを指摘する）．

さらに $h = 1/mn$ とすると，$1/mn$ 年あたり利率で $1/n$ 年間単利運用した場合の利率は，$1/n$ 年の利率よりも小さいことから，$1/mn$ 年間の年換算利回りは，$n(a^{1/n} - 1)a^{-1/n}$ よりも大きく，$n(a^{1/n} - 1)$ よりも小さいということになります（ホワイトボード）．

結局，$h$ をどんどん小さくしていくと，$h$ 年あたりの年換算利回り（$(0, 1)$ と $(h, a^h)$ を結ぶ直線の傾き）は，$a$ を固定すると，一定の値，つまり瞬間の年換算利回り（$(0, 1)$ におけるグラフの傾き）に近づきます．

利息 $b$ を増やして $a$ を大きくしていくと，瞬間の年換算利回りも大きくなります．

瞬間の年換算利回り（グラフ $y = a^x$ の $x = 0$ での傾き）が，ちょうど１になるような $a$, つまり，$h$ を０に近づけていったとき

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

が１に近づくような $a$ を，自然対数の底といい， $e$ と書きます．

瞬間の年換算利回りが1だとすると，非常に大きな $n$ に対して，ほとんど瞬間に近い，$1/n$ 年間の利子は，ほぼ $1/n$ と考えられますから，1年後の元利合計 $a$ は

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

となっているはずなので，

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と書くことができます.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

でした．しかしこの方法で $e$ を求めるのは大変で，もっと効率的に $e$ を計算する方法があります.

正の整数 $n$ に対して，$n!=1\times 2\times\cdots\times n$ を $n$ の**階乗**といいます.

$1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$, $7!=5040$, $8!=40320$, $9!=362880$, $10!=3628800$ です.

$e$ は階乗を使って，次のように表されます.

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots=2.71828\ldots.$$

階乗 $n!$ は $n$ が大きくなるにしたがって急激に大きくなるので，近似計算は楽です.

$$1+\cdots+\frac{1}{10!}$$

と $e$ との誤差は，$3\times 10^{-9}$ 程度です.

**問題**　電卓で，$1+\cdots+\frac{1}{8!}$ を計算しましょう.

瞬間の年換算利回りが1であるときの，1年間の元利合計が $e$，利率が $e-1$ でした.

元の問題にもどって，実際の年間利率が $b$ であるとき，瞬間の年換算利回りはいくらでしょうか.

$a=1+b=e^c$ となるような $c$ をとります.

このような $c$ を $a$ の自然対数といい，$\log_e a$ と書きます．すると，$1/n$ 年間の年換算利回りは

$$n(a^{1/n}-1)=n(e^{c/n}-1)=c(n/c)(e^{c/n}-1)$$

です．ここで，$h=c/n$ とおくと，右辺は

$$c\times\frac{e^h-1}{h}$$

で，これは $h$ が 0 に近づくとき $c$ に近づきましたから，結局瞬間の年換算利回りは，$c = \log_e(1+b)$ ということになります．

利息の問題と同じ考え方で，放射性物質の減少率を計算することができます．

半減期が $H$ 年であるとき，時間 $h$ 年経ったら，放射線がもとの何倍になっているかを計算すると，

$$2^{-h/H}$$

でした．$2 = e^c$ となるような $c = 0.693\ldots$ が $\log_e 2$ でしたから，

$$2^{-h/H} = e^{-ch/H}$$

で，減少分を 1 年間に換算すると，

$$\frac{1 - e^{-ch/H}}{h} = e^{-ch/H}\frac{c}{H} \times \frac{e^{ch/H} - 1}{ch/H}$$

です．$ch/H$ をどんどん 0 に近づけると，右辺は $c/H$ に近づきますので，結局，瞬間における減少率は年間換算で，

$$\frac{c}{H} = \frac{\log_e 2}{H} = \frac{0.693\ldots}{H}$$

ということになります．

つまり放射性物質の崩壊する速さ（本質的には放射線の強さ）は，半減期に反比例する，ということがわかります．

たとえば 1 グラムのセシウム 137 が，1 秒間に崩壊する量は，半減期が $30 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60$ 秒であることに注意すると，

$$\frac{0.693}{30 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} \text{ グラム}$$

概算で約 $7 \times 10^{-10}$ グラム，原子の個数でいうと，$3 \times 10^{12}$ 個程度になります．

セシウム 137 の原子は，1 回の崩壊で安定状態に達する（正確には 1 回ベータ線を出した直後に 1 回ガンマ線を出す）ので，セシウム 137 のガンマ線の強度は，1g あたり $3 \times 10^{12}$ ベクレル（3 テラベクレル）程度ということが，計算できます．