書　評

「幾何学入門」（上・下）

H. S. M. コクセター（著），銀林浩（翻訳），ちくま学芸文庫Ｍ＆Ｓ

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
小磯　深幸

「過去3，40年来，多くのアメリカ人は，幾何学にいくらか興味を失ってきた．この書物は，忘れ去られたこの哀れな学問に息を吹き込もうという目的で書かれた.」という衝撃的な文で始まるこの本は，イギリス生まれの幾何学者ハロルド・スコット・マクドナルド・コクセター（Harold Scott MacDonald Coxeter，1907–2003）によって著された．1961年のことである．当時のコクセターはカナダのトロント大学に所属していたため,「アメリカ人云々」という言い回しになったのであろう．それにしても,「忘れ去られたこの哀れな学問」とはショッキングな言い回しである．1920–60年頃と言えば，数学の抽象化が進み，現代的な幾何学が整備されつつあった時代であろう．本書のカバーには，コクセターは,「数学の抽象化が称揚された時代の中，イメージ豊かな幾何学の探究を続けたことから,《現代のユークリッド》とも称される．不連続群や多胞体の研究で先駆的な業績を挙げた」とある．コクセターが鏡映群を抽象化することにより導入した「コクセター群」は有名だ.「本書全体を流れる統一的な筋は，変換群の思想，一言でいえばシンメトリーである」という，序文の中の一文は象徴的である．

ここで，幾何学の名誉のために（?），本書が書かれた1960年代以降の状況を少しだけ述べておこう．たとえば筆者の専門の微分幾何学のみに限っても，偏微分方程式等を用いる幾何解析学の発展，Einstein計量・ゲージ理論・弦理論・ミラー対称性などの数理物理学に端を発する研究，Gromov–Witten不変量・Donaldson不変量などの不変量と微分構造の関係解明，代数幾何学・複素幾何学・離散空間の幾何学の発展などなど，その研究の発展や数学内外の諸分野の研究への貢献は，とどまるところを知らない．

さて，本書に戻ろう．本書は文庫版で，上巻約470ページ，下巻約420ページ．4部から成り，各部は概ね大学の4か年に対応していると，コクセターは述べている．1961年当時の欧米の大学の数学科を念頭に置いているのであろう．内容は豊富であり，読みごたえがある．(もちろん，前段落で述べたような最近の微分幾何学についての記述はない．) 目次を簡単に記しておく．第1部　１．三角形，２．正多角形，３．ユークリッド平面の等長変換，４．2次元結晶学，５．ユークリッド平面上の相似変換，６．円と球，７．ユークリッド空間の等長変換と相似変換，第2部　８．座標，９．複素数，１０．5つの多面体，１１．黄金分割と葉序，第3部　１２．順序の幾何学，１３．アフィン幾何学，１４．射影幾何学，１５．絶対幾何学，１６．双曲的幾何学，第4部　１７．曲線の微分幾何学，

１８．テンソル記法，１９．曲面の微分幾何学，２０．測地線，２１．曲面のトポロジー，２２．4次元の幾何学.

上記の各章は5–9個の節から成っており，各節末にはいくつかの演習問題が用意されている．また，巻末には，それらの略解が収録されている．なお，微積分が使われるのは，第4部のみである．ちなみに，現在の大学数学科のカリキュラムでは，本書の第1–3部の内容はこれほど詳しくは講義されず，一方，たとえば微分幾何学では多様体の講義が入るのが標準的であろう.

さて，本書は，必ずしも最初から順番に読まなければ理解できないというわけではない．興味に応じて所々読み飛ばすことも可能である．序文には，その辺りのことも含め本書の概要が記されているので，まずは一読されることをお勧めする．また，本書を読まれる際には，ご自分で紙に図を描きながらお読みになることを勧める．何と言っても幾何である．文章や数式のみでは理解が深まらない.

以下，筆者にとって印象的であった箇所を中心に，本書の概要や感想を紹介しよう.

第1部の第6章半ばまでは，平面の幾何学である．ユークリッドの「原論」における幾何学の基本的思想や公準・公理の説明から始まり，三角形や円についての初等幾何（補助線を使って証明する幾何）が展開される．円の曲率がその半径の逆数として定義されていることは，曲率の概念は初等幾何的ではないという意味で興味深い．また，モーリーの定理「三角形の内角の隣り合った3等分線の交点は，正三角形を作る」(1899年頃)，シルヴェスターの予想「平面上のn個の点が一直線上に無い時は，そのうちの2点のみしか通らない直線が少なくとも1つ存在する」(問題提出は1893年．証明されたのは1933年頃か?)は，簡潔で面白い命題である．証明も紹介されている．第6章半ば以降では空間図形が扱われる．ところで，平面，空間共に変換の概念が丁寧に扱われている．とりわけ平面においては，格子（あるいは，タイル張り）と基本領域，それに付随する群の作用が説明され，これらの概念のエッシャーの芸術への応用が紹介されており，コクセターならではと思わせる.

第2部の目次は，座標，複素数，5つの多面体，黄金分割と葉序．特に，フィボナッチ数の葉序への応用についての説明に工夫がなされている．ある種の樹木の枝に生えている葉が，枝のどのような向きに出ているかということが，フィボナッチ数と対応しているということはよく知られている．本書では，ヒマワリの小花，マツカサの鱗片，パイナップルの鱗片などの螺旋状の配列が，フィボナッチ数と関連付けて説明される.

第3部では，アフィン幾何学，射影幾何学，双曲幾何学など，古典幾何学の基礎が論じられる．アフィン幾何学はアフィン変換で不変な性質を調べる幾何学ということができる．アフィン変換とは，線形変換と平行移動の合成である．したがって，アフィン変換によって平行線は平行線にうつされるが，直線の向きは必ずしも保たれない．アフィン幾何学は，ユークリッド幾何学よりも一般的な概念であると言うことができる．1980年以降は，アフィン微分幾何学として発展している.

射影幾何学は，射影変換で不変な性質を調べる幾何学ということができる．現在では，射影幾何学から自然に得られる n 次元射影空間は，幾何学の基本的な対象の 1 つである．

本書では，アフィン幾何学，射影幾何学誕生の歴史が述べられていることも興味深い．これにより，アフィン幾何学と射影幾何学の関係や，それらの幾何学の意味するところが明確になるからである．

双曲幾何学は，ユークリッド幾何における平行線の公理「1 直線 r と，その上に無い 1 点 A に対し，平面 Ar 上で，A を通り r と交わらない直線は高々1 本である.」を,「1 直線 r と，その上に無い 1 点 A に対し，平面 Ar 上で，A を通り r と交わらない直線が少なくとも 2 本ある.」に置き換えたものである．ここで，平面 Ar とは，点 A と直線 r を含む平面である．本書では，双曲幾何学が成立するモデルとして，ポアンカレの円板モデルと上半平面モデル，ベルトラミによる射影モデルが与えられ，それらの関係が詳しく述べられている．さらに，双曲幾何学においては,「三角形の 3 辺の長さがすべて無限大の時も，その面積は有限である」という興味深い事実の証明も，等長変換群を用いて証明されている．

また，3 次元格子の対称変換群の結晶学への応用，対称変換群の多面体万華鏡への応用といった話題も，コクセターならではであろう．

第 4 部は，曲線と曲面の微分幾何学・曲面のトポロジーの基礎概念の説明，4 次元の幾何学への招待である．曲線と曲面の曲率や測地線，測地座標系が導入され，曲面のガウス曲率に関するガウスの大定理が証明される．また，曲面の全曲率という微分幾何学的量と曲面のオイラー標数という位相幾何学的量を結ぶガウス・ボンネの定理も証明される．向き付け可能あるいは不可能な閉曲面の種数による分類も与えられる．さらに，長らく未解決であった 4 色問題「平面の地図を，隣り合う 2 つの国は必ず相異なる色で塗る時，4 色あれば十分か?」の歴史が紹介されている．4 色問題自身は，本書出版後の 1976 年にケネス・アッペルとヴォルフガング・ハーケンにより，コンピュータを用いることにより証明されたが，当時の最高速のスーパーコンピュータを 1200 時間以上使用したと言われている．しかしながら,「4」を「5」にすると，証明は比較的容易である．この「5 色問題」は，6 色定理「球面上または射影平面上の地図を塗り分けるには，高々6 色あれば十分である」からすぐに得られる．本書では，6 色定理のたくみな証明が与えられる．

さて，4 次元空間を理解するための見方が述べられていたことは興味深かった．平面に新しい軸を付け加えて 3 次元空間を得るという方法を 1 次元上げるだけで，当たり前と言えばそうだが，あらためて想像すると 4 次元空間が「見えた」ような気がした．皆さんも，手には触れられない 4 次元空間を，いや，さらに高次元の空間を，ゆったりと想像してごらんになられてはいかがでしょうか.

最後に，コクセターの伝記『多面体と宇宙の謎に迫った幾何学者』(日経 BP 社，シュボーン・ロバーツ著，糸川洋訳) が出版されていると「訳者あとがき」にあったこと，銀林浩氏のどことなく柔らかい語り口が本書を読みやすくしていると感じたことを記しておく．