数学・数理科学の知見が必要な地震・防災研究課題

堀宗朗*

1 はじめに

3.11 東北地方太平洋沖地震が引き起こした東日本大震災は広域の大震災であった．津波被害と原子力発電所の問題，そして復興が大きな課題となっている．東海・東南海・南海地震や首都直下地震の発生も指摘されている今日，大震災の分析とともとに，巨大地震に対する新たな備えも考えなければばならない．国の財政，企業の状況等，決して楽観視できないが，より効率的な地震防災のために研究開発が必要とされている．

ことさら東北地方太平洋沖地震と東日本大震災という使い分けをしたが，地震と震災は異なる．震災という被害を起こす巨大地震が関心事なのであり，地震を知る必要があるのは被害を防ぐためだからである．したがって，防災の第一歩は，どのような地震が起こるか，その結果どのような被害が生じるか，という 2 点を予測することになる．しかし，この予測は難しい．過去の経験に基づく予測が主流であり，環境や社会の変化も見据えた合理的な予測は研究段階にしかない．

地震・災害の合理的予測には数学・数理科学が必要である．特に数値計算の大規模化・高速化が進む現在，この新しい道具を使った合理的予測には，問題の設定や解法の考案等，数学・数理科学の知見は不可欠である．この点を背景として，数学・数理科学の知見が必要と著者が考える地震・防災の研究課題を紹介する．

2 地震・防災の基礎

地震と地震防災．一括りにされることが多いが，異なる 2 つの学問分野が基となっている．一つは地球科学という理学分野であり，地震そのものを対象とする．もう一つは地震工学であり，耐震設計と都市防災を対象とする．対象が異なるため，こと数理的な観点で見れば，全く異なる問題を解いていることになる．

地球科学．一時期は地球物理学，さらに古くは地震学と呼ばれた分野である．地断層やプレート境界の破壊現象である地震の発生メカニズムの解明はこの分野が目指すものの一つであるが，地震を使って地球の構造や特性を調べることも目的となっている．破壊過程を除けば，地震は線形弾性体を伝播する波動 [1, 2] である．したがって対象となる数理問題は次の線形偏微分方程式である．

$$(c_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}(\mathbf{x},t))_{,i} - \rho(\mathbf{x})\ddot{u}_j(\mathbf{x},t) = 0. \tag{1}$$

ここで c_{ijkl} と ρ は弾性テンソルと密度，u_i は変位ベクトル，$\mathbf{x}$ と t は空間の点と時間である．式 (1) では直交座標系 x_1-x_2-x_3 が使われており，$(.)_{,i}$ と $\dot{(.)}$ は関数 $(.)$ の x_i と t の偏微分，そして総和規約を用いている．地殻構造から構成される地殻に対応して c_{ijkl} と ρ は区域ごとに一様である．地震波動の解析には，非一様な地殻構造の推定も必要である．これも逆問題として設定される数理問題である．

耐震設計に関わる地震工学では，地面を揺らす地震動が引き起こす構造物の揺れを予測することが目標の一つである．構造物のサイズが倍になると，地震動の加速度が構造物に起こす力は 8 倍，一方，構造物

東京大学地震研究所，東京都文京区弥生1-1-1，113-0032

の底面の断面積は 4 倍となる．すなわち，建築建物や社会基盤施設のような大きな構造物は，地震動に対して相対的に弱く，ある程度の損傷は許容されている．耐震工学では，非線形の揺れとなる損傷を許容範囲に抑えるところがポイントとなる．構造物の非線形性は単純ではなく，数理的には，係数が不連続に変わる次の偏微分方程式 [3] として設定される．

$$(c^{ep}_{ijkl}(\mathbf{x},\nabla\mathbf{u})u_{k,l}(\mathbf{x},t))_{,i}-\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_j(\mathbf{x},t)=0. \tag{2}$$

ここで c^{ep}_{ijkl} は弾塑性，$\nabla\mathbf{u}$ は $u_{i,j}$ を成分とする変位勾配である．c^{ep}_{ijkl} は損傷の度合いをモデル化しており，$\nabla\mathbf{u}$ に関して不連続に値を変えるところが特徴である．値が 0 になることもある．

都市防災に関わる地震工学は，社会科学との接点でもあり，被害予測とそれに基づく防災計画の立案，地震発生時の行政等の危機管理が具体的な対象となる．被害予測は，過去の地震や被害のデータの統計解析に基づく．例えば地震の位置とマグニチュードを仮定すると，震源からの距離から地点での震度が推定され，この震度と構造物の種類・築年代等から損傷の度合いが推定される．この震度と損傷の推定に統計解析が使われるのである．危機管理は，地震発災直後の緊急的な対応と復旧作業が含まれる．緊急的な対応には医療も関わる．復旧作業は損傷を受けた公的ないし私有の構造物の修復である．

3　顕在化された研究課題

3.1　地震動の予測

災害を引き起こす地盤の揺れである地震動は，適当な初期条件を与えて地殻モデルの解析領域で式 (1) を解くことで予測することができる．初期条件の設定は地球科学の重要な課題であるが，数理的な課題は式 (1) の解法である．対象となる地殻モデルは $10^{4\sim5}$ m のオーダであるが，必要な地震動の空間分解能は $10^{0\sim1}$ m 以下のオーダである．単純に自由度を計算すると 10^{15} を遥かに超えるオーダとなり，これを 0.01 s の時間分解能で解くにはまさに大規模な数値計算が必要である．数値計算では線形偏微分方程式をマトリクス方程式に変換するが，この大規模マトリクス方程式の解を正確かつ高速に求めるアルゴリズムも必要となる．

全章で簡単に説明したように，地殻構造を推定することで c_{ijkl} と ρ の関数モデルが決定される．この関数モデル同定は典型的な逆問題であるが，実は，少々複雑である．逆問題に使われるデータは地表で観測される地震動であるが，地殻構造というモデルの他，地震の源となる断層やその破壊過程というソースも不明である．典型的な逆問題である損傷同定の非破壊検査では，入射された波の反射を使って損傷を同定するが，これは入射波というインプットと反射波というアウトプットを使って，損傷というモデルを同定することになる．インプットとアウトプットが既知，モデルが未知である．地殻構造のモデル同定は，アウトプットが既知，インプットとモデルが未知である．さらにアウトプットも地表面で計測された地震波である．不適切極まりない逆問題なのである．東北地方太平洋沖地震の場合，日本の地震観測ネットワークは震源の西側にあり，東側や北・南の地震波は観測できない．西側のモデル同定は可能であろうが，インプットの同定は難しくなる．世界の観測点で計測された地震波を使うことになるが，遠方のため，同定の分解能・精度等には限界がある．

正確な地殻構造を使うと地震動の正解が求められる．これは真であるが，この逆は誤である．すなわち地殻構造が少々曖昧でも，地盤の揺れである地震動の解を求めることは可能である．したがって，「地震動を求めることができる程度に」正確なモデルを求めるという，緩い条件を課して逆問題を解くことは数理的には面白いかもしれない．室内で行われる実験と異なり地球を対象する地球科学では，観測できるデータには限界がある．この限界に対応するため，逆問題に緩い条件を設定するということが考えられる．

3.2　被害の予測

地震の予測と同様，耐震工学の対象となる構造物の地震応答を予測することは被害の予測の第一歩となる．これは，構造物一棟一棟に対しモデルを作り，地盤の揺れを境界条件として与えて式 (2) を解くことである．耐震設計では式 (2) を近似的に解くことが圧倒的に多いが，王道はやはりこの非線形偏微分方程式を解くことである．有限要素法 [4, 5] という解析手法が使われることが多い．地殻のような 3 次元的に広がった固体と異なり，構造物は棒・梁・板といった 1 次元，2 次元的な形状をした部材の集合であり，構造モデルの自由度は地殻モデルほどではない．課題は，c^{ep}_{ijkl} が不連続に変化する非線形の偏微分方程式の解法である．古典的なニュートン・ラプソン法に基づくさまざまなアルゴリズムが提案されており，実用化されている．このアルゴリズムは x の非線形方程式 $f(x) = 0$ を解く際に

$$f(y + \mathrm{d}y) = f(y) + f'(y)\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

というテイラー展開を使って近似解 y の更新 $\mathrm{d}y$ を $-f(y)/f'(y)$ として求めるものである．c^{ep}_{ijkl} のテイラー展開ができない場合，うまく解が求まらないことは自明である．堅牢なアルゴリズムの開発が望まれる．

被害の予測には構造物の損傷の程度を予測しなければならない．これは材料の非均一性に起因する．損傷の最後の過程は破壊であるが，実際の構造物は材料の若干の違いのため，破壊の様子はさまざまである．実際，破壊実験は複数のサンプルを使って，破壊のばらつきも調べなければならない．数理的には，このばらつきは，解の不安定性として理解することができる．すなわち c^{ep}_{ijkl} に若干の乱れが加わったとき，乱れが 0 の時の u_i の解が不安定であるため，解が大きく変わってしまうのである．非線形力学の典型的な問題であり，材料が不均一がある場合，u_i が表わす損傷・破壊の過程を正確に予測することは不可能である．その一方で，過程ではなく，損傷・破壊の程度を予測することは可能であるかもしれない．これは，

$$\lim_{t\to\infty} u_i(\mathbf{x}, t) = u^*_i(\mathbf{x}) \tag{4}$$

であることを仮定している．この $u^*_i(\mathbf{x})$ が分かれば損傷の程度の予測は可能である．なお，u^*_i は破壊のパターンに対応し，複数あるかもしれない．

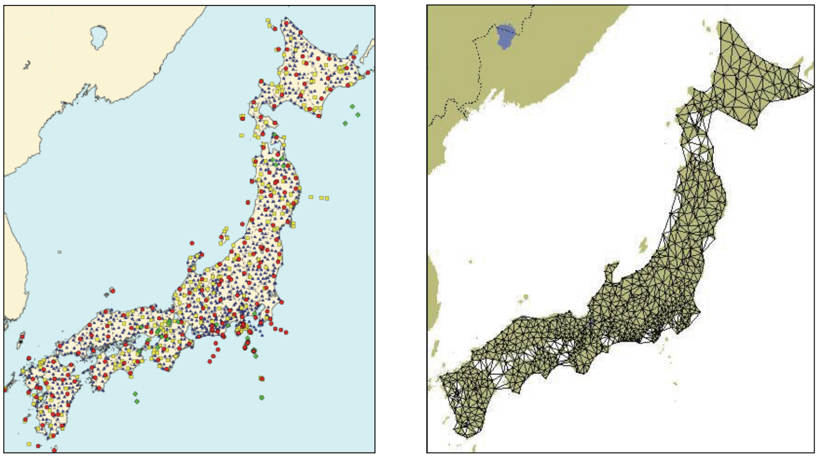
4　潜在的な研究課題

4.1　連続ネットワーク観測のデータ解析

我が国は，世界でも先進的な地震波や地殻変動の連続ネットワーク観測を行っている（図 1 参照）．地震波に関しては，1,000 のオーダの観測点で，加速度 3 成分を 16 bit のデータとして常時 100 Hz でサンプリングしている．これは毎秒 1 MB 程度のデータが得られることを意味している．最先端の連続ネットワーク観測であるものの，このデータの処理は従来とさほど変わらない．地震発生に合わせて，各観測点での波の発生を調べるのである．ネットワーク観測によってほぼ一様に観測データが得られようになったものの，ほとんどの観測データは捨てられている．1 日に 1,000 程度の地震が観測されても，観測されたデータ長は平均 10 秒程度であり，連続観測が活用されているとは言い難い．

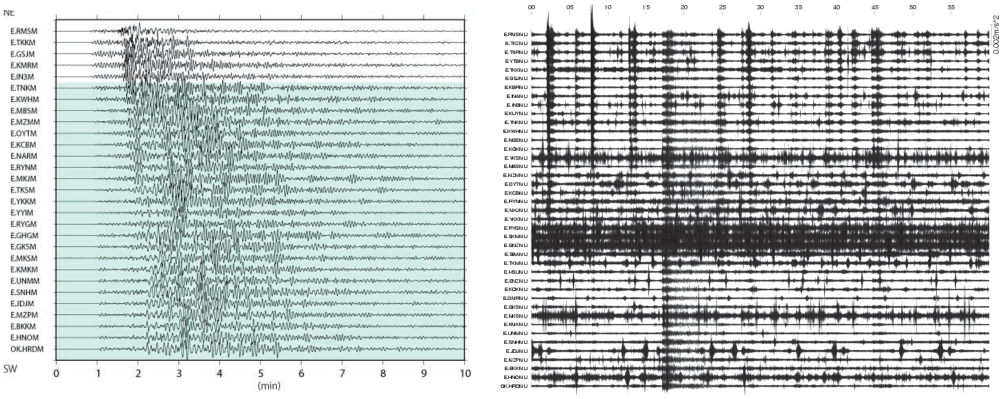
地震波が明瞭にわかる観測データと比べ，常時のデータはノイズが大きくシグナルは埋もれてしまう（図 2 参照）．シグナルとノイズの分離は決して簡単ではないが，連続ネットワークの利点を活かし，新しいデータ処理の開発が望まれる．その一つはフーリエ変換によって観測データを周波数領域のデータに変換し，地殻構造を反映したグリーン関数の同定を試みるものである．数式の見通しを良くするため，グリーン関数を G_{ij}，インプットとアウトプットの地震と地震波を f_i と u_i とすると，

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_j(\mathbf{y}). \tag{5}$$



a) K-NET　　b) GEONET

Figure 1: 地震と地殻変動の観測ネットワーク.



a) 地震が発生した場合の明瞭なシグナルが認識できるデータ　　b) 常時の，ノイズとシグナルが混在したデータ

Figure 2: 連続ネットワーク観測で計測される地震波データ.

ここで $\mathbf{x}$ は観測点，$\mathbf{y}$ は震源となる．総和規約を用いている．前述のように，インプットの f_i のみならず地殻モデルによって決まる G_{ij} も未知となることが地震の特徴である．連続ネットワーク観測のデータを使って f_i と G_{ij} を決めることが数理的な課題である．

一つの試みとして，ネットワークの観測点を $\mathbf{x}^\alpha$ $(\alpha = 0, 1, \cdots)$，β 盤目の地震と地震波を f_i^β と u_j^β $(\beta = 0, 1, \cdots)$ とすると，式 (5) から

$$u_i^\beta(\mathbf{x}^\alpha) - u_i^\beta(\mathbf{x}^0) \approx G^1_{ijp}(\mathbf{y}^\beta) f_j^\beta (x_p^\alpha - x_p^0)$$

が得られる．勿論 $G^1_{ijp}(\mathbf{y}) = \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})$ である．もし，観測された左辺と観測点の位置から決まる $x_p^\alpha - x_p^0$ を使って，$G^1_{ijp}(\mathbf{y}^\beta) f_j^\beta(\mathbf{y}^\beta)$ が推定できる場合，すなわち，

$$G^1_{ijp}(\mathbf{y}^\beta) f_j^\beta(\mathbf{y}^\beta) = U_{ip}^\beta \tag{6}$$

となる場合，

$$U_{ip}^\beta \approx (G^{10}_{ijp} + G^{11}_{ijpq}(y_q^\beta - y_q^0)) f_j^\beta \tag{7}$$

が得られる．ここで $G^{10}_{ijp} = G^1_{ijp}(\mathbf{y}^0)$ と $G^{11}_{ijpq} = \frac{\partial G^1 ijp}{\partial y_q}$ である．グリーン関数がテイラー展開できることが仮定されているが，1 つの地震に対して式 (6) の U^β_{ip} を求め，多数の U^β_{ip} から式 (7) の f^β_j の他に G^{10}_{ijp} と G^{11}_{ijpq} が求まると，未知のインプットとともに $\mathbf{y}^0$ 近くの地殻モデルの情報が推定されることになる．多数の $\{u^\beta_i(\mathbf{x}^\alpha)\}$ を使うことで，より正確に f^β_j と G_{ij} が推定できることが期待される．

4.2 維持管理と地震防災

地震防災の要諦は構造物が地震に壊れないようにすることである．これには構造物を強くすることが必要であるが，これはなかなか難しい．例えば，加速度 a の地震動に対し f の力が発生するという単純な構造物のモデルを考えると，a が小さい間は a と f は比例するが，a が大きくなると a と f は比例しない．比例している時の a と f の比 f/a は構造物の固さとなるが，実はこれは強さではない．強さは f の最大値である．

構造物の固さを測ることは可能である．構造物の振動を計測すると，構造物の固有周期が分かるが，これから固さが決まるからでる．上述の単純な構造物のモデルにおいて，f/a の値を K とすると，構造物の揺れ $u(t)$ は次の運動方程式を満たす．

$$M\,\ddot{u}(t) + K\,u(t) = 0. \tag{8}$$

勿論，M は構造物の重さである．$u(t)$ を計測してフーリエ変換を施す場合，他に比べて大きな値をとる周期が固有周期である．この周期は K/M の比で決まるから，固有周期が分かれば K，すなわち固さが分かるのである．

固有周期から決まる固さと違って，構造物の強さの計測は難しい．a と f の関係，式 (8) では，$K\,u$ で与えられた項が非線形となるからである．構造物の強さを一定のレベルに保つことは，構造物の維持管理の問題である．合理的な維持管理には，できるだけ正確に強さを正しく計測することが必要である．過去に蓄積された構造物の非線形挙動や強さのデータを使うとともに，計測された振動特性を使って f の最大値である強さを正確に推定する方法 [6] を確立することが望まれている．

4.3 復旧の最適化

被害を受けた構造物を修復する復旧は難しい問題である．例えばライフラインの場合，上水・下水，ガス・電気，通信と複数の種類の管が地中に埋設される．管の材質・形状，深さも異なり，この結果，被害の有無はもとより程度も異なる．上水は上流，下水は下流，と復旧の方法も異なる．一方，技術者・資材等を被災現場に運ぶためには共通の道路を使う．ライフラインの使用者も共通である．

復旧は勿論，その最適化はなかなか難しい問題であることも理解いただけであろうか．復旧を条件付きの資源配分問題 [7] として設定すると，その最適化は資源配分の方法を見つけることになる．具体的に説明しよう．ライフライン L^a の使用可能量を c^a とすると，地震による損傷によって c^a は低下する．技術者 E^α が派遣され，資源を投入して c^a を元の値に戻す．資源の量を q^b とすると，この中から $r^{b\alpha}$ を L^a の修理に投入する．形式的であるが，c^a の時間変化を与える次の関数が定義できる．

$$\frac{\mathrm{d}c^a}{\mathrm{d}t}(t) = \mathcal{C}^a(r^{b\alpha}(t)). \tag{9}$$

勿論，$\sum_\alpha r^{b\alpha} < q^b$ であり，復旧の方法に応じて E^α が投入する $r^{b\alpha}$ の値は変わる他，道路の被害状況等によって $r^{b\alpha}$ に上限が付く．一方，使用者 E^β は L^a を $u^{a\beta}$ 使用することで b^β の利益を得る．すなわち

$$b^\beta(t) = \mathcal{B}^\beta(\{u^{a\beta}(t)\}) \tag{10}$$

であり，$\sum_\beta u^{a\beta} < c^a$ である．E^α の派遣先と資源投入量，$\{L^a(t), r^{b\alpha}(t)\}$，を与えると $c^a(t)$ が決まり，適切に $u^{a\beta}(t)$ を設定して $b^\beta(t)$ が決まる．したがって，復旧期間全体での使用者全体の利益 $\int \sum_\beta b^\beta\,\mathrm{d}t$ を最大にするよう，$\{L^a(t), r^{b\alpha}(t)\}$ を決めることが復旧の最適化の数理問題である（図 3 参照）．

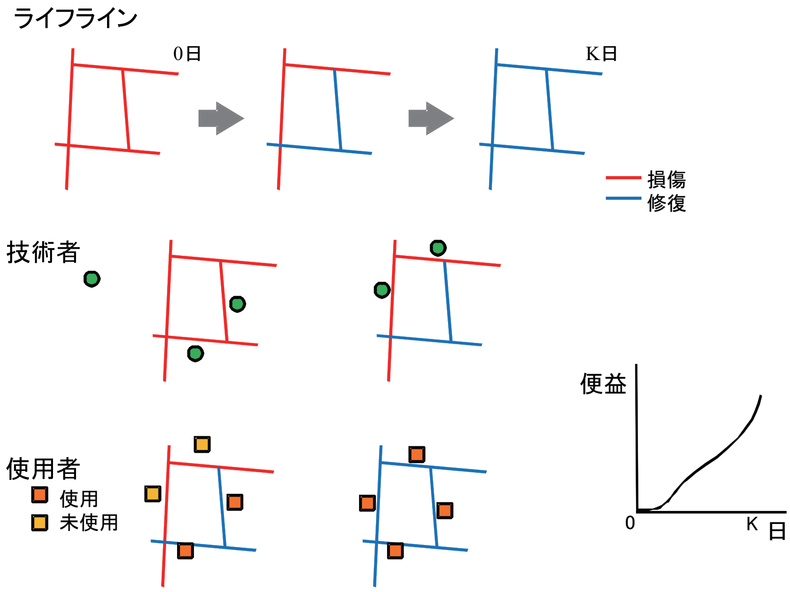


Figure 3: ライフラインの復旧問題：技術者は派遣してライフラインを修理し，それに応じて使用者の便益が回復する．

変数 $r^{b\alpha}$ 等が離散的な値をとる他，関数 C^a 等も連続ではない．そもそも時間 t も 1 日ないし半日単位の離散的な値をとる．L^a や R^b が都市内に分布する他，多様な技術者や使用者がいるため,「L^a と R^b の都市モデルの中を E^α と U^β に対応したマルチエージェントが活動する」というシミュレーションが，この離散的な資源配分問題の数値解法の一つとなる．しかし，シミュレーションは可能であるが，そもそも解の最適性を判定することが難しい．エージェントシミュレーションは計算科学の重要な研究対象であるが，数理問題の解法としての数理的な研究も望まれる．

5　おわりに

さて，古典物理を基とした理工学は非可逆的に衰退する宿命にある，と言い切るのは穏やかではない．しかし，いわゆるナノテクとライフサイエンスに代表される現代科学技術は若い世代に抗しがたい魅力があることは否定できない．したがって，地震・防災の研究に関わる人材が実は質量ともに低下する傾向にある．淋しい現実ではあるが，技術立国が国是の我が国において，この傾向を直視し，いかに地震・防災の研究開発を進めるかを考えなければならない．

計算科学・情報科学も交えて，数学・数理科学との共同研究開発を行うこと．地震・防災の研究の新しい方向の一つと考えている．この方向は，数学・数理科学で蓄積された知見を利用するだけではなく，数学・数理科学の研究者が関心を持つような課題を見つけることも重要である．本文で紹介した課題に対し，一人でも多くの数学・数理科学の研究者の方が関心を持っていただければ僥倖である．

References

[1] K. Aki and P. G. Richards, *Quantitative Seismology*, 2nd Edition, Univ Science Books, 2002.

[2] 山中浩明，岩田知孝，佐藤俊明，武村雅之，香川敬生，地震の揺れを科学する —みえてきた強震動の姿，東京大学出版会，2006.

[3] M. Hori, *Introduciton to computaitonal earthquake engineering*, 2nd Edition, Imperial College Press, 2011.

[4] 菊地文雄，有限要素法概説—理工学における基礎と応用，サイエンス社，1999.

[5] 久田俊明，野口裕久，非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，1996.

[6] A. Mita, *Structural Dynamics for Health Monitoring*, 三恵社, 2003.

[7] 堀宗朗, 弓削田 恭兵, 市村 強, WIJARTHNE Lalith，ライフライン地震被害に対する復旧過程のマルチエージェントシミュレーションの開発，土木学会論文集 A1，**7**, **1**, 165–176, 2011.