数学が目指すもの*

砂田利一（明治大学理工学部）

「数学が目指すもの」というと，今世紀に残された未解決問題を列挙することを読者は期待するかもしれない．本稿の目的は，この期待に沿うものではないことを最初にお断りしておく．むしろ，数学の「性格」について様々な例を挙げて解説するのが目的である．すなわち,「数学をする」とはどういうことかを説明したいのである．

1　数学の言葉

数学という学問が，次のような 2 つの側面を持つことは誰もが認めることであろう．

横への広がり：社会現象，自然現象の中で数学の言葉を用いて表現される分野の開拓する．

例：工学，物理学，情報科学，統計学，物質科学，生物学，経済学，言語学，心理学

縦への深化：数学独自の問題意識の下で数学の言葉を研ぎ澄まし，深く美しい数学理論を創り出す．

例：代数学，解析学，幾何学，組合せ論，基礎論

この 2 つの側面をバランスよく発展させることが，数学界に求められている．このためには、いわゆる「純粋」と「応用」が互いに価値観を尊重しあうことが大事である。

それはそれとして，上で述べた「横への広がり」,「縦の深化」の双方に「数学の言葉（言語）」が登場している．この「数学の言葉」とは何だろうか？

数学者といえども，数学の話をしたり，書いたりするときには，それぞれの国の言語を用いている．そして，数式や数学的概念を除けば，それは日常的に使われる言葉である．

実は，数学的概念でさえ，日常用語により説明されることがある．これは，数学の発展過程では特に避けがたいし，また一般読者・聴衆に数学を伝えよ

*これは 2010 年 9 月 26 日に名古屋大学で行われた市民講演会の記録である．

うとするときには，曖昧とは分かっていても，普段使われている言葉を用いるのが通常である．例を挙げよう．

例 1　「A_n, $n = 1, 2, \cdots$ について，n を**大きくしていけば** A_n は A に**限りなく近づく**」

例 2　「空間の中の滑らかな閉曲線 C で囲まれた向きを持つ曲面を M とするとき，

$$\int_M \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\ X d\sigma = \int_C X \cdot \mathbf{t} ds$$

が成り立つこ．ここで，曲面の正の側（単位法ベクトル $\mathbf{n}$ の向かう側）に立って，C にそって進むとき，曲面が常に**左側にある**ような方向に積分するとする.」

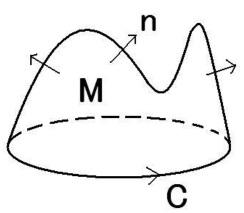

図 1:

例 3　「円柱面は長方形の両サイドを**張り合わせる**ことに作られる」

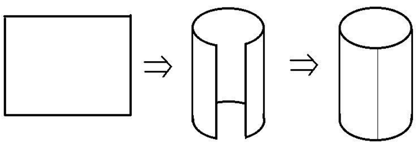

図 2:

上の例で使われている日常用語は,「右・左」,「限りなく近づく」,「貼り合わせる」である．恐らく読者は，このような用語で十分に数学的内容を表現しているから，曖昧などとは考えないかもしれない．数学者も、余り気にしないで使っている。

しかし，曖昧な表現は誤った結論やパラドックスに導くことがある．これは、数学が最も嫌うことである。

例 4　図 3 のような $\triangle ABC$ と折れ線の列 $\{c_n\}$ を考える．c_n の長さは，つねに $AB + AC$ に等しい．一方，c_n は線分 BC に**限りなく近づくから，最後には一致し** $AB + AC = BC$.

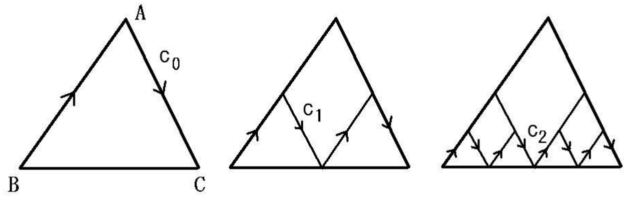

図 3:

もちろん、三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より大きい（$AB + AC > BC$）から、これはおかしい。では、上の論法のどこに間違いがあるだろうか？

この間違いは「限りなく近づくから最後には一致」という用語の曖昧さから生じている.

古代ギリシャの時代に,「無限」に関するこのような曖昧さが奇妙な結論に導くことに気付き,「無限」を論ずるときの「言葉遣い」を正確にしようとした数学者がいる．古代の万能人ユードクソス（B.C.408 頃-355 頃）である．彼は，現代の数学言語に近い表現で,「限りなく近づく」という言い方から曖昧さを除去した．これを「取り尽し論法」という.

日常用語による表現と取り尽し論法を比較してみよう.

1 つの量を考える（たとえば，長さや面積・体積のような幾何学的「量」）.

日常的表現:「与えられ量の半分，または半分より大きい量を取り去り，残りから，さらにその半分または半分より大きい量を取り去る．これを繰り返すと，量は「限りなく」小さくなっていくだろう.」

取り尽し論法:「あらかじめ任意に指定した量を考える．上のプロセスを繰り返すと，残りの量はついにはこの指定した量より小さくなるだろう.」

この 2 つの間の違いは，ある意味では些細なことである．しかし，ユードクソスの論法は，曖昧さを消去し，奇妙な結論に導くことを防ぐことになる．さらに，この論法を現代の数学言語により表現してみよう.

「a_0 を最初の量，a_n を n 回目に残る量とする．ϵ をあらかじめ指定した**任意の**量とすると，**ある**番号 n_0 が**存在して**，n_0 より大きい n について $a_n < \epsilon$ が成り立つ.」

さらに，究極的数学言語である論理記号を使った表現では，次のように表される.

「$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \ [n \geq n_0 \rightarrow a_n < \epsilon]$」

ここで，記号 $\forall$ は「任意の」を表し，$\exists$ は「ある…が存在する」を表している.

言葉の曖昧さが引き起こすパラドックスとして有名なのは，嘘つきのパラドックスである．これは新約聖書の中の「テトスへの手紙」の第 1 章で引用

されている「クレタ人は，いつもうそつき，たちの悪いけもの，なまけ者の食いしんぼう」とクレタの預言者エピメニデス（紀元前 6 世紀）が述べたことに端を発するパラドックスであり，

「クレタ人であるエピメニデスが,『クレタ人は嘘つきである』と発言した」という文章の奇妙さを問題とする．この奇妙さというのは，エピメニデスの発言の真偽を問うことから発する．もし発言が真（本当）であれば，クレタ人の 1 人であるエピメニデスは嘘つきなことになり，彼の発言は偽（嘘）になる．もし発言が偽であれば,「クレタ人は嘘つきではない」ということになり，とくにクレタ人の 1 人であるエピメニデスの発言は本当のことになる．いずれにしても不合理なように思われる．しかし，この不合理は，実は「クレタ人は嘘つきである」という曖昧な表現から生じているのである．すなわち「クレタ人は嘘つきである」を正確に表現すれば「すべてのクレタ人が嘘つきである」となるのであり，これを否定すると,「あるクレタ人は正直」ということになる．このクレタ人がエピメニデスである必要はない．したがって,「エピメニデスの発言は偽」ということで解決される．

2　右と左

前節の例 2 では、「左側」という言葉が登場した。右と左というのは，人間の左右の手から発する言葉である．ということは，この例では，数学的内容を人間の手を使って表現していることになる．数学が人間という特殊な「もの」を使って構成されるのは，いかにも奇妙であろう．そこで，人間の存在から離れて，左右を数学的に定義したい（哲学者は「数学者は素朴なプラトン主義者」とよぶが、これは数学は人間の存在とは独立に「実在」するという数学者の信念に対する悪口である）.

左右の意味を明確にするのに役立つ「鏡のパラドックス」を述べよう.

鏡に映った自分の上下は同じなのに，左右は逆になる．何故だろうか？

これは，真の意味でのパラドックスではない．ただ,「上下」と「左右」が同じ範疇の言葉と感じる「心理的作用」が引き起こすパラドックスである（このパラドックスに関する多数の解釈が存在するが、どれも不十分である）.

数学的に単刀直入に言えば,「上下」はベクトルで表現され,「左右」はフレーム（枠）で表現される．ここでフレームとは，互いに直交する 3 つの単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を並べて得られる組 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ のことである．図で表すときは，1 つの点を始点とする 3 つの矢印で表わす．これが人間の手と関係することは，図 5 により明らかであろう．

2 つのフレーム $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{2}_3)$ が，互いに平行移動と回転で番号も込めて重なりあうようにできるとき，同じ種類のフレームということにすると，丁度 2 種類のフレームがあることが分かる．これが，左手と右手の 2 種

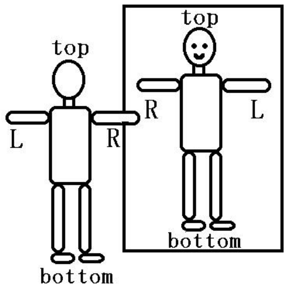

図 4:

類があって，他には「○手」というのがないことに対応する事実である．そして，鏡に映したフレームが元のフレームと異なる種類になることが,「左右が逆転」するということに対応している．

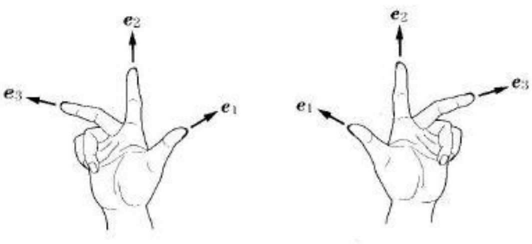

図 5:

では，2 種類あるフレームのうち,（例えば）右手に対応するフレームを数学的に特徴づけすることができるだろうか？もし，これができれば，右・左を数学で使ってもよいことになる．しかし答えは「否」なのである．

すると，第 1 節の例 2 で述べたことが，数学的には不完全な内容になってしまう．だが安心して欲しい．実は，2 種類あるフレームの 1 つを任意に選ぶと，これを使って曲線の向きを定めることができ，さらに左辺の rot もこのフレームにより定まって，等式が成立することが確かめられるのである．

ここでは詳細は述べないが，例 3 の「張り合わせる」という用語も，同値類，商集合という厳密な言葉を用いて数学的に完全なものにできる．

3　「形式言語」と「中間言語」

第 1 節の最後に述べたように，数学の究極的言語は論理記号を用いて書かれる言語である．論理記号を用いて論理を「形式化」し，さらに数学を形式的に表現することには，アリストテレス（前 384–前 322）以来の長い歴史がある．この歴史に登場した主要な人物を挙げよう．

ライプニッツ（1646-1716），
ブール (1815-1854),
フレーゲ (1848-1925),
ラッセル (1872-1970),
ヒルベルト（1862-1943）

数学言語の形式化は，特にヒルベルトがそうであったように，数学理論に忍び込む可能性がある「矛盾」を防ぐことを目的としていた．では，数学者の仕事は，形式言語で表現される理論を創ることなのだろうか？　そうではない．数学者の論文を見ても，形式言語では書かれていない．

例を見よう．

We shall start with fixing the terminology required to state our results. Let $X = (V, E)$ be a finite connected graph with a set V of vertices and a set E of oriented edges. We allow X to have loop edges and multiple edges. We denote by $o(e)$ (resp. $t(e)$) the *origin* (resp. *terminus*) of an edge $e \in E$, and by $\overline{e}$ the *inverse edge*. The *adjacency operator* $\mathcal{A}$ is an operator acting on the space $C(V)$ of functions on V defined by

$$(\mathcal{A}f)(x) = \sum_{e \in E_x} f(t(e)),$$

where $E_x = \{e \in E |\ o(e) = x\}$. We write deg $x = \#E_x$, the *degree* of x. Throughout we assume that deg $x \geq 2$ for every $x \in V$.

A *closed path* in X is a sequence $c = (e_1, \ldots, e_k)$ of edges with $t(e_i) = o(e_{i+1})$ $(i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. If $e_i \neq \overline{e}_{i+1}$ for all $i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, c is called a *closed geodesic*. We may form the *m-multiple* c^m of a closed geodesic c by repeating c m-times. If c is not a m-multiple of a closed geodesic with $m \geq 2$, c is said to be *prime*. Two prime closed geodesics are said to be *equivalent* if one is obtained from another by a cyclic permutation of edges. An equivalence class of a prime closed geodesic is called a *prime cycle*. The *length* of a prime cycle $\mathfrak{p}$ is defined as the number of edges in a representative of $\mathfrak{p}$, and is denoted by $|\mathfrak{p}|$.

これを見ると，通常の英語表現の中に数式が混在していることが分かる．さらに，集合（set）と作用素（operator）という言葉が登場していることにも気付く．作用素は写像の特別な場合である．

集合は,「見分ける」ことのできる対象の集まりとして定義される概念（カントル）．この対象のことを要素あるいは元という．集合 A から集合 B への写像は，A の要素を B の要素に対応させる「規則」（関数の一般化）のことである．

現代数学は集合と写像の概念を用いて構築されている．そして，日常言語と形式言語の間にあるという意味で，数学者は数式および集合と写像の概念を使う「中間言語」により数学を表現しているのである．

中間言語は、その言語論的厳密性において形式言語には劣るが、曖昧な表現を正すには十分な威力を持っている。そして、その気になれば形式言語に「変換」できるようになっている。言い換えれば，プロの数学者はその気になれば形式言語で表しうる中間言語を使っているのである．

「数学の深化を目指す数学者が行っているのは，形式言語で表しうる数学理論の構築である.」

このような言い方は、誤解を招きかねないのだが、意識する、しないに関らず、これが数学者の行為なのである。

参考文献

[1] 砂田利一,「新版　バナッハ・タルスキーのパラドックス」，岩波書店，2009 年

[2] 砂田利一，現代幾何学への道 –ユークリッドの蒔いた種–，岩波書店，2010 年