

書 評

ハイブレイン のりとはさみでつくる双曲平面

阿原一志 著 日本評論社

奈良女子大学理学部 山下 靖

やや旧聞に属することかもしれないが、今年3月のパリコレのイッセイミヤケの作品のテーマが「ポアンカレ・オデッセイ」で、「幾何化予想」のサーストンとのコラボレーションが話題になった。その際に3次元幾何の基礎的なことからスタジオの方にレクチャーしたのが、この本の著者の阿原一志さんである。阿原さんは非専門家向けにトポロジーの魅力を伝えるのがとても上手な方なので、この様な仕事には最適の方であろう。阿原さんのブログによると、最初に「もし『数学のなかで、この言葉はイヤだな』という言葉があったら、挙げてください」と聞いてみて、「三角関数，方程式，微積分，・・・」との答えに、「これらの言葉は使わずにレクチャーします。」と言って始められたそうである。さすが阿原さん！

本書はこの阿原さん自身による手作りの双曲幾何の探求で、数学セミナーに連載されたものを単行本としてまとめたものである。実際にペーパークラフトで比較的簡単に作ることができる図形でありながら、中学や高校での数学には現れないものであるため、中学生・高校生や一般市民向けの数学啓蒙活動の題材としてとても良いものになっている。さらに、数学の専門家が自分の愉しみのために読んで、生き生きとした数学を味わうことができるであろう。単に完成した数学を講義するのではなく、どうやって発想したのかであったり、途中でどんな間違いを犯してしまったのかなど、研究が進む様子を記述する筆致は見事で、著者と一緒に数学をしているような気持ちにさせられる。

まず、内角が63度、63度、54度となるような二等辺三角形をたくさん用意する。ただし大きさは同じものとする。次に同じ長さの辺どうしを貼りあわせて多面体を作るのだが、54度の頂点のまわりには54度の頂点のみがちょうど7つ集まるように、63度の頂点のまわりには63度の頂点のみがちょうど6つ集まるようにして多面体を構成する。するとどの頂点も角度の合計が378度になるような多面体ができあがるが、これが本書で言うところの「ハイブレイン」の一例である。ここでは抽象的な貼りあわせではなく、3次元空間内で実現することを主に念頭においている。二等辺三角形を貼りあわせるときの面角は一意的ではないので、実現にはいろいろあり、さらにうまく三角形を貼りあわせて穴のあいた球面なども構成することができる。

...ともかく、この二等辺三角形を厚紙でたくさん切り出して、張っていきました。

できてくる、できてくる。これまでに見たこともないような多面体の形の

オンパレードです．...（本書 5 ページ）

著者の興奮がこちらにまで伝わってくる．ここでは紙面の都合で省略したが、本当は最初から 63 度、63 度、54 度が天下り式に与えられるのではなくて、どうやってここにたどり着いたのか、学生さんとのゼミの様子が目に浮かぶような形で記述されている．詳しくは本書をご覧ください．

ここで本書の内容を順に見ておこう．

第 1 章「ハイプレインとは何か」 この章ではハイプレインを導入するとともに、関連する未解決問題の紹介や応用に関するアイデアを述べることで、全体のイントロダクションとなっている．応用の一つとして挙げられている建築に関する話が最近になって現実になりつつあることを著者の阿原さんから筆者は教わった．著者はいつの間にか数学の外とつながってしまうようである．

第 2 章「負定曲率曲面の歴史」 この章では、曲率を定義し、3 次元空間内の負定曲率曲面の例が発見された年代の順にコンピュータグラフィックスと共に紹介されている．さらに石膏模型や可積分系などについて触れた後、ガウス-ボンネの定理が説明されている．最後のガウス-ボンネの定理は後の章の導入になっている．

第 3 章「双曲幾何学」 双曲幾何学の入門である．単に数学的に双曲幾何を導入するのではなく、対話的な幾何学ソフトウェア「シンデレラ」を実際に操作しながら双曲幾何の世界に入っていく方法は著者ならではのものである．「シンデレラ」については文献[1]に詳しい解説がある．もちろん手元に「シンデレラ」がなくても、本書の図により十分理解をすることができる．

第 4 章「双曲タイリング」 タイルによって双曲平面を敷き詰める双曲タイリングの話で、ここでも「シンデレラ」が活躍する．双曲タイリングはハイプレインの発想のもとの一つと言え、ここまでの第 2 章から第 4 章までがハイプレイン導入のための準備となっている．

第 5 章「(6,6,7)-ハイプレイン」 いよいよハイプレインの話題になり、ここで 3 角形の 3 つの角度を 63 度、63 度、54 度に決めた計算などが示され、読者は自分の手を動かしてハイプレインを作ってみるよう促される．筆者も付属の CD の PDF ファイルをプリントアウトして少し作ってみた．なるほど負曲率とはこういうことか、と平面に収まりきらない 3 角形のつらなりをガクガクさせてみて実感することができた．紙による 3 角形たちのガクガク感がハイプレインの面白さだとは思うのだが、もう少し気楽に遊んでみるには、著者によるソフトウェア（名前は同じく「ハイプレイン」）が付属の CD に収録されているので、Windows および Mac にて実行してみることができる．また、数学ソフトウェアを多数収録した Linux である

KNOPPIX/Mathにも収録されている。春に行われる数学会の年会でDVDが配布されているので、これをお持ちの方も多いかと思う。こちらの版の方が少し新しく、ハイプレインの具体例が追加されていて楽しいものとなっている。この章の最後ではガウス-ボンネの定理のハイプレイン版が示されている。

第6章「おむすびとちまき」 おいしそうな題名である。本章はうまくハイプレインをつなげていって意味のある形を作ろうという試みで、それぞれ位相的には3つ穴あき球面および4つ穴あき球面になっているハイプレインである。手で触ってみるとすぐに気がつくことだが、変形はやや自由でもありやや不自由でもあり、ちょうどよい具合に悩ましく、この章のおむすびやちまきなどができること自体とても興味深いものである。読者はこれらを実際にペーパークラフトで作ってみることで達成感を味わうことができるであろう。

第7章「テセレーション」 ここでは3角形に同一の模様をうまく描いておいて、ハイプレインとしてつなげたときにきれいな多面体を作る試みを行う。本書の言葉を借りると「エッシャーみたいなアレ」である。ちゃんとイラスト付きの3角形のPDFを付属CD-ROMに掲載してくれるところが著者のとても親切なところで、様々な才能をもった著者が羨ましい。

第8章「ペンローズ・タイリングとハイプレイン」 平行移動による周期をもたないことで有名なペンローズ・タイリングは通常のユークリッド平面上の話だが、これと同じことを双曲平面でできるのかという問題が考えられる。これはすでに研究されていて、それをハイプレインにすることも可能である。この話はさらに奥が深そうで、今後の発展が期待される。

第9章「応用と展開」 数学セミナー連載後の話がまとめられている。著者はこのハイプレインの話題について、中学生とのワークショップを行ったとのことである。このときの様子が記述されていて、ハイプレインを使った数学入門講座などをする際の参考になる。筆者の周りでもハイプレインを使った幾何学入門は大変好評であるとの事例を聞いたことがある。計算機実験も大変結構であるが、ペーパークラフトによる幾何学にはまた別の魅力があるようである。他の興味深い展開については紙面の都合でここでは述べることができないが、ぜひ本書をご覧ください。

本書は、三角関数・方程式・微積分などは出てくるが、大学の数学にあまりなじみがなくても理解できる内容となっている。もし理解できなくてもハイプレインを作ってみるだけでも楽しめる。そしてハイプレインにはまだ汲みつくされていない何か新たな可能性があるのではないだろうか。読者の挑戦が待たれる。

参考文献

[1] 阿原一志 「シンデレラで学ぶ平面幾何」 シュプリンガー・フェアラーク東京