

女子中高生夏の学校 2010 -科学・技術者のたまごたちへ-実習記

ダイヤモンドの立体をつくろう

奈良知恵

東海大学 阿蘇教養教育センター

1. はじめに

離散幾何学の分野には数学的な知識があまり要求されない問題が多数あります。感覚的に把握しやすく挑戦しやすいなどの理由から、もっと幅広い方々にこの分野の面白さを知って欲しいと思っておりました。そんな折に、プロジェクト「女子中高生夏の学校 2010 ～科学・技術のたまごたちへ～」で私が担当した実習の講師のお話をいただき、浅学も省みずにお引き受けしました。場所は埼玉県国立女性教育会館で、全国から公募で集まった中高生が3日間にわたって取り組むプログラムの2日目（8月13日）の午前中に複数の実習からの選択方式で行われました。

2. 「ダイヤモンドの立体をつくろう」の実習内容

2.1 テーマの設定

「ユークリッドの3次元空間を等体積に分割したとき、1個当りの平均表面積を最小にするような分割を求めよ」という問題（Kelvin, 1887年）があります。これにさらに条件を付けて、「合同な多面体によって分割せよ」とすると、切頭八面体が現在まで知られている中で最も表面積が小さい分割です。このように「合同な多面体」という条件をつけると、空間を隙間なくかつ重複なく被覆する多面体（すなわち、モノタイルの多面体）を対象にすることになり、「タイリング問題」に結びつきます。しかし、四面体に限っても、既知のモノタイルがすべてなのか否かさえ分かっていません。

そこで、この実習では、正四面体を変形したモノタイルとしてダイヤモンドの炭素原子配置から自然に求められる図1の多面体（これをここでは「**ダイヤモンドの十六面体**」とよぶことにします）を扱うことにしました。この立体が最初に印刷物に載ったのは、デザインの本（K. Critchlaw, “Order in Space—A Design Source book—, Thames & Hudson, 1969年）と言われていて、対称性が高くとても美しい形をしています。

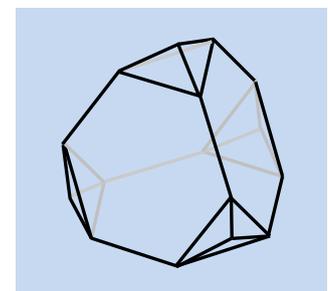


図1 ダイヤモンドの十六面体

2.2 テーマの導入

対象が中高生なので専門的な言葉を避けるために、導入として「ダイヤモンドはなぜ硬いのでしょうか？」という質問を投げかけることから始めました。ダイヤモンドの炭素原子の配置は非常に対称性が高く安定していることから「硬い」と言われています。そこで、それらの炭素原子がどんな配置をしているかの説明に入りました。

正四面体の重心に1つの炭素原子を置くと、この原子は正四面体の4つの頂点に置いた炭素原子と結合します(図2)。その他の炭素原子は結合した2つの炭素原子の中点に関して点対称になるように配置されます(図3)。このようにすると、8個の炭素原子が1つの(同一平面上にはない)輪をなして、きれいな周期的な配置として空間に広がっていきます。それを立方体で切り取り、見やすい方向に回転すると図4のようになります。ここで、点 a は立方体の頂点、3点 b, c, d は頂点 a を共有する立方体の3つの面の中心、点 g は正四面体 $abcd$ の重心です。

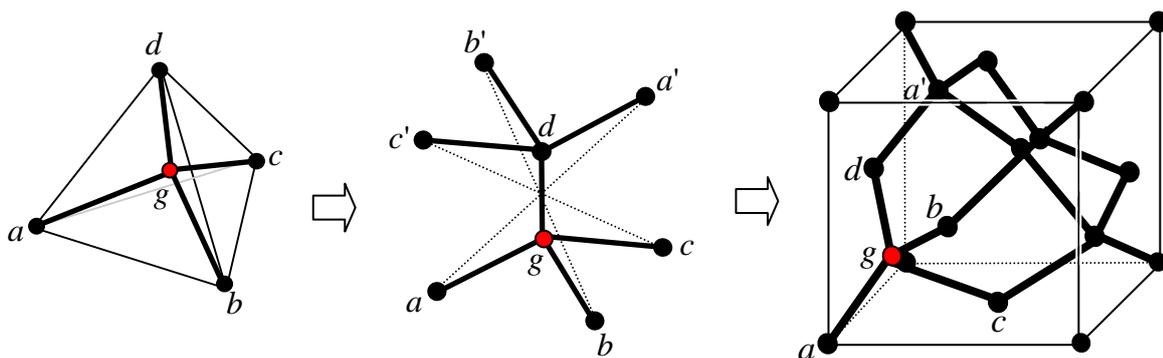


図2 炭素原子の配置

図3 点対称の配置

図4 立方体で切り取った配置

2.3 「ボロノイ図」と「モノタイル」の定義

ダイヤモンドの炭素原子の配置とここで工作する「ダイヤモンドの十六面体」を結びつけるのが「ボロノイ図」です。ボロノイ図とは、大雑把にいうと、距離空間(たとえば、ユークリッド平面やユークリッド空間)上に配置された点の集合に対して、最も距離が近い点がどこになるかで距離空間を分割した図です。平面上の2点ならば、2点を結ぶ線分の垂直二等分線になるし、3点ならば、3点を通る円の外心(辺の垂直二等分線の交点)を共有する3本の半直線によって分割されます。空間の場合は、2点に対して、垂直二等分線の代わりに垂直二等分面を考えることとなります(図5)。各点がこれらの平面で囲まれる領域の境界は面の集まりになります。

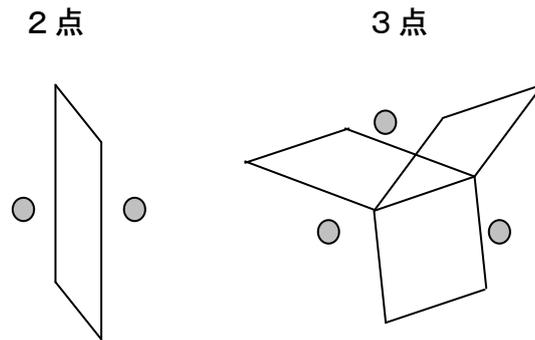


図5 ボロノイ図の例

そこで、ダイヤモンドの炭素原子配置によるボロノイ図を考え、図2の重心 g を含む領域（ボロノイ領域という）がどんな形になるかを調べてみます。まず、正四面体の頂点をなす4点 a, b, c, d の各々に対して、 g と結ぶ線分を垂直に二等分する平面が4枚できるので、これらの面で囲まれた点 g の領域は対称性から「正四面体」になります。残りの炭素原子との間で垂直二等分面を作って、点 g が囲まれる立体（ g のボロノイ領域）を求めると図1の立体（ダイヤモンドの十六面体）になるのですが、証明は参考文献（奈良知恵・伊藤仁一「ダイヤモンドと正四面体」数学セミナー 1月号, 日本評論社 2010）を紹介してすませ、ここでは実際に厚紙で立体を作って、どのようにして空間を埋め尽くしていくのかを調べてもらうことにしました。ダイヤモンドの十六面体（図1）は4個の正六角形と12個の二等辺三角形の面から構成されています。

ここでは、「ダイヤモンドの十六面体をつくる過程で、いくつかの立体も作り、それらのうちどれがモノタイルであるか、出来上がった立体を使って判定し、その理由の説明も課題にしました。

2.4 工作

幾何学的な面白さを感じてもらうためには、工夫によって種々の結果が得られることが望ましいので、正四面体とダイヤモンドの十六面体との間をつなぐ2つの多面体も含めた4個の多面体（図6）を作成してもらいました。予定として、

展開図がプリントされた工作用紙を配布

⇒ 立体を適宜必要な個数だけグループ毎に作成

⇒ モノタイルか否かを判定

⇒ 判定の理由を考察

⇒ グループ毎に発表

との段取りを受講者へ伝えました。

☆☆☆ さて、モノタイルはどれでしょうか？ ☆☆☆

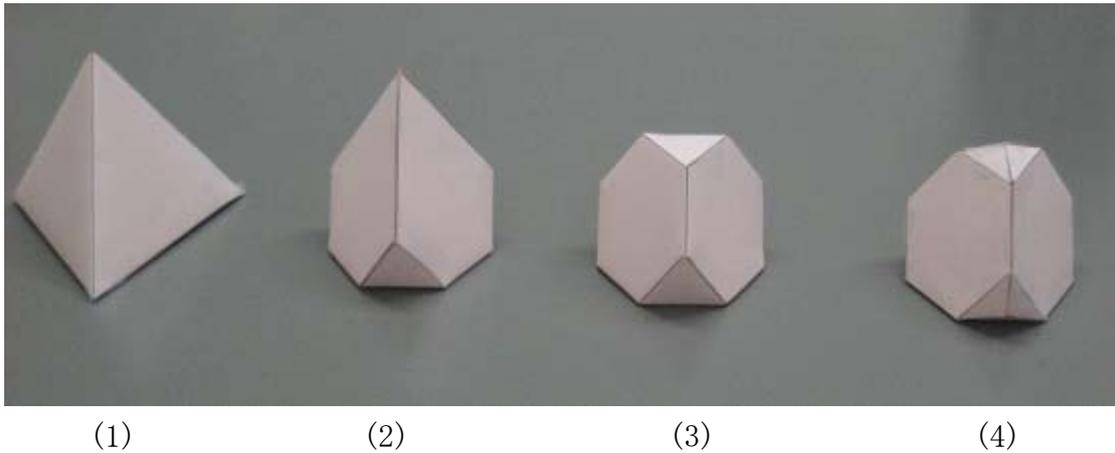


図6 工作する4種類の立体

図6はそれぞれ図7の工作物です。

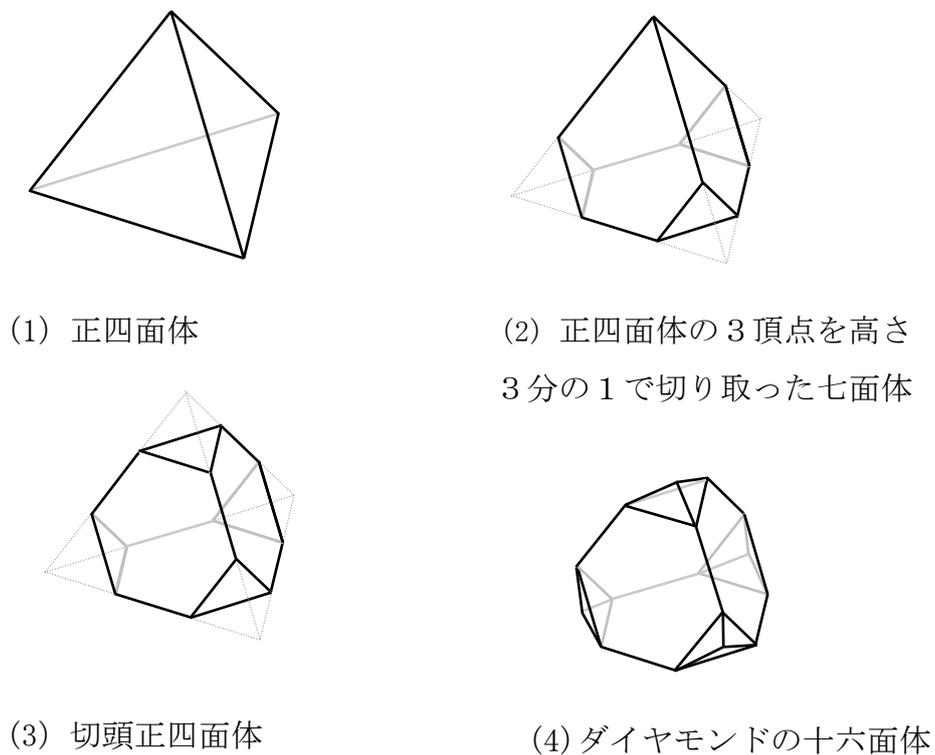


図7 4個の立体と正四面体の関係

図6の4個の多面体の相互関係を理解するために、このほかに、(1)の正四面体を高さ3分の1に縮小したもの（ミニ正四面体とよぼう）と、このミニ正四面体を重心で合同な4個の四面体（小ピラミッドとよぼう）に分割したものの（図8）も作成することにしました。

これらは、ダイヤモンドの十六面体が図 6(3)の切頭正四面体の各正三角形の面に小ピラミッドをくっつけたものになっていることを確認する道具になります (図 9).

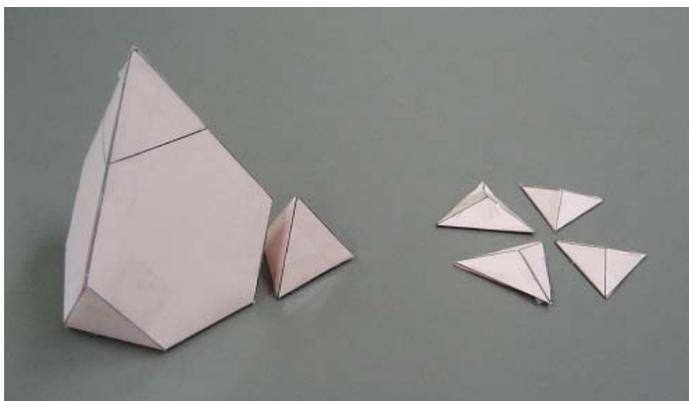


図 8 ミニ正四面体と小ピラミッド

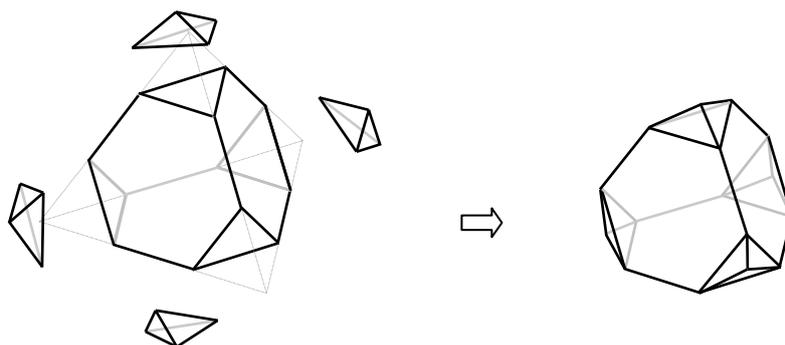


図 9 ダイヤモンドの十六面体と正四面体の関係

2.5 モノタイルか否かの判定とその理由

ダイヤモンドの炭素原子の配置がどの原子にとっても同一の状態になっていることから、ボロノイ領域はすべて合同になり、ダイヤモンドの十六面体はモノタイルであることが言えます。受講生は3つのグループに分かれて作業に入り、実際にどのように空間を埋めていくのかをたくさんの合同多面体を使って実験しました。

(1) 正四面体

「5個を1つの辺に集めても360度よりわずかに少ないからモノタイルではない」との結論をどのグループも出しました (図 10)。あるグループは正四面体の2面角を計算で求めて $360 \div 5 = 72$ 度よりほんの少しだけ小さいことを数値的に導いていました。

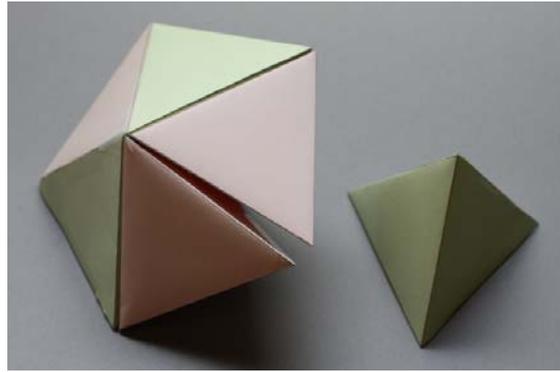


図 10 正四面体に対する判定

(2) 切頭正四面体 (図 6 の(3))

正四面体のおときと同様の理由で「モノタイルではない」との結論をすべてのグループが出しました。

(3) ダイヤモンドの十六面体

実際にいくつかの合同な立体を自分の手で合わせてみると、「空間を埋めつくす」と納得できるような合わせ方を見つけるのは結構大変だったようですが、たとえば図 11 のように数個を寄せ集めた塊を作ると、空間全体を覆っていく様子わかります。

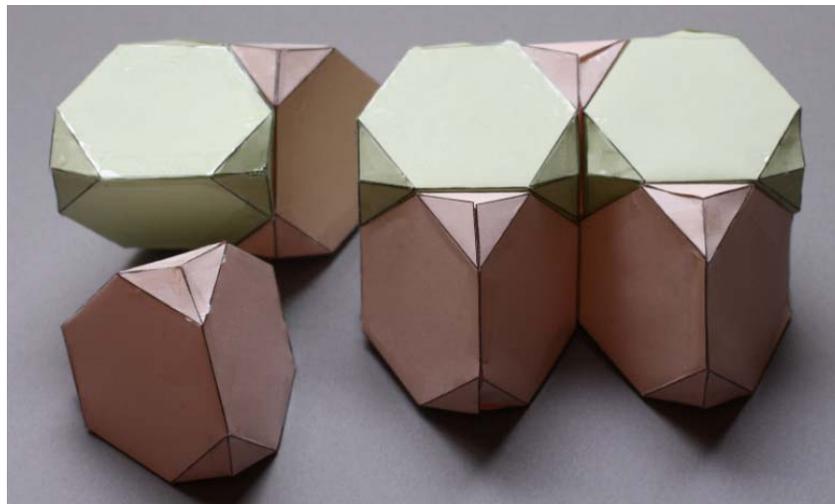


図 11 ダイヤモンドの十六面体に対する判定

(4) 七面体 (図 6 の(2))

グループによって種々の取り組みが見られました。「モノタイル」であるとの判定理由として、最も明解な解説を披露したグループは図 12 のように、2 個をくっつけることによって平行六面体ができることを見出しました。2 時間という本実習の制限時間内では、

「なぜ平行六面体ができるのか？」というところまで突っ込んだ討論はできませんでしたが、この七面体がモノタイルであることを自他共に納得させるには十分でした。

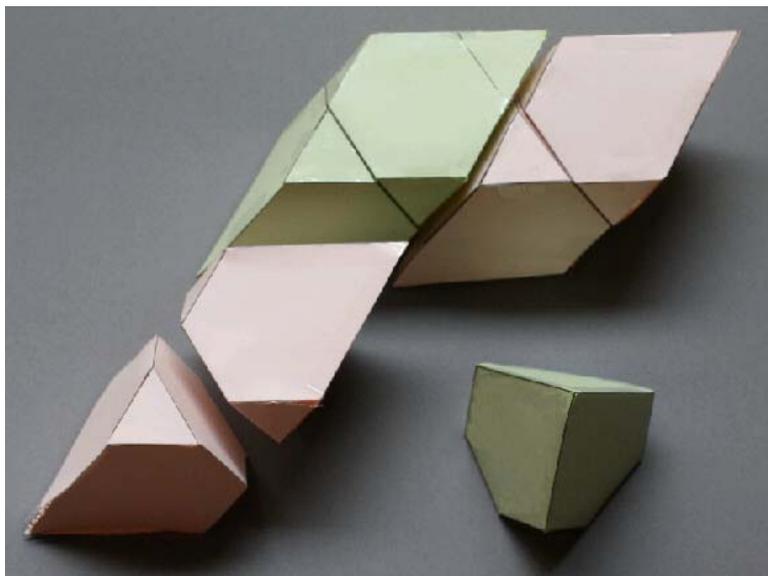


図 12 明快な判定理由の配置

2.6 証明の新しい視点

図 12 の事実に気づくと、正四面体を切頭した図 6(2) の七面体は単にダイヤモンドの十六面体の立体的構成を説明するのに役立つばかりでなく、「ダイヤモンドの十六面体がモノタイルであること」の数式を用いない証明にもなります。すなわち、切頭正四面体（図 6(3)）に対して、1つの正三角形の面にミニ正四面体をくっつけると図 6(2) の七面体ができ上がり、一方、図 9 のように 4 個の小ピラミッドを正三角形の 4 面にくっつけるとダイヤモンドの十六面体を得られます。このことから「ダイヤモンドの十六面体はモノタイルである」ことが言えます。

3. 実習を振り返って

工作の時間をできるだけ節約して、あれこれと試行錯誤しながら考察する時間を如何にして多くするかが実習を面白くする鍵なので、TAとの直前の打ち合わせでは時間配分を中心に対策を話し合いました。グループ編成の工夫だけでなく、いろいろな提案が出され、それをもとに実習が進行しました。準備段階では、正四面体のモノタイルか否かの判定にまつわるプラトンやアリストテレスの歴史的话题も用意していたのですが、蘊蓄話はすべてカットして、グループの中での個人的な活動（グループの代表者がモノタイルか否かの判定をするために試行錯誤をするのではなく、全員が自分自身の手によって体験）をする

ための時間の確保に努めました。受講生とTAとの年齢差が少ないことは大きなメリットで、今回は科学・技術の“ひな”とも呼べるTAとの「協働」が実習をよりスムーズにし、楽しいものにしてくれました。

最後に、実習にあたって柏原賢二先生をはじめ多くの方々に大変お世話になりました。この紙面をお借りして心より感謝申し上げます。