志甫淳さんの文部科学大臣表彰によせて

東京大学大学院数理科学研究科
斎藤 毅

志甫淳さんが，数論幾何学における p 進基本群および p 進コホモロジーの研究により，科学技術分野における文部科学大臣表彰 若手科学者賞を受賞されました．志甫さんの受賞は，数論幾何の重要な研究課題である数論的基本群や p 進コホモロジーの研究が高く評価されたものです．志甫さんとは，彼が学部 2 年のときに微積分の講義を担当したときから，指導教員としてあるいは職場の同僚として長年苦楽 (？) をともにしてきたものとして，今回の受賞は個人的にもたいへんうれしいことです．受賞の対象となった志甫さんの業績などについて，簡単にご紹介します．

志甫さんの専門は数論幾何です．なかでも，数論的基本群や p 進コホモロジーの世界的な研究者として活躍しています．数論的基本群は，1980 年代の Riemann ゼータ関数の特殊値と結びついた研究以来，コホモロジーとならんで数論幾何の重要な研究対象です．日本でも，伊原康隆，織田孝幸，寺杣友秀，中村博昭，松本眞，玉川安騎男，望月新一，古庄英和ほか多くの人々による優れた研究があります．

代数多様体のコホモロジーには複素多様体としての特異コホモロジー，代数的な微分形式で定義される de Rham コホモロジーなど専門家以外にも比較的なじみ深いのではと思われるもののほかにもいろいろなものがあります．有名なものとしては，Grothendieck によって導入され Weil 予想の解決へとつながったエタール・コホモロジーやクリスタリン・コホモロジーがあります．このなかで，志甫さんの主要な研究対象となっているのが，標数 $p > 0$ の体上の代数多様体に対して定義されるクリスタリン・コホモロジーをはじめとする p 進コホモロジーで，こちらも，加藤和也，兵頭治，栗原将人，都築暢夫，中島幸喜，辻雄ほか多くの人たちによる優れた研究があります．

上のようなコホモロジー理論はいずれも孤立したものではなく，たがいに比較同形とよばれる同形で結びついています．Grothendieck は，なぜこのようにいろいろなコホモロジー理論がありしかもそれらが相補うように結びつきあっているのかと自問し，それらを統一するモティーフという視点を提唱しました．Deligne は，射影直線から 3 点をのぞいたものの基本群と Riemann ゼータ関数の整数点での値の関係についての研究のなかで，基本群についてもコホモロジーと同じくモティーフの視点が有効であることを主張しました．これが，代数的基本群に関する志甫さんの研究の出発点となりました．

数論幾何では，整数環上定義された多様体を調べるときに，それを素数 p を法として還元して得られる有限体上の多様体を考えるのが基本的方法です．標数 p の環では p 乗写像が環の準同形となるので，コホモロジーや基本群に Frobenius とよばれる作用素が定まります．

標数 0 の代数多様体に対しては，それを複素多様体と考えることで基本群が位相幾何的に定義されますが，それを定義体上の射影巾単代数群として「完備化」したものは，巾零可積分接続のなす淡中圏の基本群として代数的に定義できます．これを巾単 de Rham 基本群とよびます．法 p 還元を考えると，この de Rham 基本群を p 進体へ係数拡大したものには，Frobenius の作用が定まるはずです．実際，Deligne はこれを定義したのですが，その定義は理論的に満足のいくものとはいえませんでした．

志甫さんの最初の業績は，クリスタリン基本群とよばれる，Frobenius の自然な作用をもつ de Rham 基本群の類似物をやはりある種の淡中圏の基本群として構成し，さらにクリスタリン基本群と de Rham 基本群の比較同形を構成するという，理論的に十分満足できる形にしあげるものでした．そして，この比較同形の構成が，その後の発展への道を開くものとなりました．クリスタリン基本群と de Rham 基本群の比較同形は，Berthelot と Ogus によって構成されていたクリスタリン・コホモロジーと de Rham コホモロジーの比較同形の類似です．コホモロジーの比較同形と同様に，収束サイトという両者をつなぐ中間的なものを考えることで，比較同形が構成されました．

代数的基本群やコホモロジーの研究では，コンパクトな多様体だけでなく開多様体を扱うことが重要です．クリスタリン基本群の構成では，開多様体のコンパクト化をとり，それを log スキームと考えることで，開多様体を扱います．すると，これがコンパクト化によらないことを示すことが，自然に問題となります．Berthelot は p 進解析的な方法で，正標数の多様体に対しそのリジッド・コホモロジーというものを構成していました．これはコンパクト化によらないという利点はあるものの，有限性などの基本的な性質を示すことが難しいという扱いにくさのあるものです．

志甫さんは，ここでも上記の収束サイトを用いることで，クリスタリン・コホモロジーとリジッド・コホモロジーの比較同形を構成し，この問題を解決しました．クリスタリン・コホモロジーは有限性をみたし，リジッド・コホモロジーはコンパクト化によらないという相補いあう性質を比較同形でむすびつけることにより，クリスタリン・コホモロジーがコンパクト化によらないこととリジッド・コホモロジーの有限性を同時に示すことができたのです．

この方法を拡張し，定数層の場合だけでなく係数つきの場合に適用することを考えると次のような問題に導かれます．リジッド・コホモロジーでは，係数層として過収束クリスタルとよばれるものを扱いますが，これに上の方法を適用するためには，もとの多様体をうまく有限次被覆でおきかえさらにブローアップをくりかえすとこの過収束クリスタルが境界にそって log の特異性しかもたないことが示せるか，が問題になります．これは，正標数における特異点解消の代用品として de Jong が導入したオルタレーションの p 進層的な類似であり，ℓ 進表現に対する Grothendieck のモノドロミー定理の p 進類似でもあります．この志甫予想は，過収束クリスタルに関する基本的な問題として，この分野の多くの研究者の目標となりました．Kedlaya が最近これを解決したということのようですが，検証にはもう少し時間がかかりそうです．

志甫さんの開多様体のコホモロジーの研究は，その後も展開中です．今年になって論文が 3 つ出版されていますが，その 1 つでは，過収束クリスタルの log 特異性について，余次元 1 での純性を証明しました．また，クリスタルの過収束性や log 特異性について，曲線に制限する判定法も証明しています．このほか，最近出版された中島幸喜氏と共著の Springer レクチャー・ノートでは，log スキームの新しい視点から，開うめこみの Leray スペクトル系列が組織的に研究されています．

去年の数学通信での辻雄さんの日本学士院学術奨励賞受賞の紹介記事にも書きましたが，日本の整数論には，高木貞治の類体論以来の優れた伝統があり，今回の受賞もそれが着実に若い世代に引き継がれていることを示すものと思えます．志甫さんは，後進の育成にも力を注ぎ，優秀な学生を育てています．今回の受賞は若手科学者賞ということで，そろそろ志甫さんも「若手」は卒業なのではとも思いますが，これからもますます若手の先頭にたって優れた業績を挙げられていくことを楽しみにしています．