書　評

整数の分割

G. W. アンドリュース, K. エリクソン 著　佐藤文広 訳

数学書房　(2006 年, 188 ページ)

徳島大学工学部　水野義紀

整数の分割とは整数を自然数の和に分割する仕方である．例えば 3 の分割は $3, 2+1, 1+1+1$ の 3 通り．そして各項 $1, 2, 3$ 達は和因子とよばれる．和因子に条件が付くこともある．本書はこの整数の分割の入門書である．大まかに言うと第１章が本書への導入，２章から４章までが組合せ論的考察，５章から８章までが母関数の方法，９章から１１章までが関連する発展的話題, 最後の章である１２章がより高度な話題への導入となっている．

第１章　整数の分割, 和因子, 分割恒等式といった用語が説明されている．分割恒等式の例として, オイラーによる「奇数和因子への分割の個数と相異なる和因子への分割の個数は等しい」が具体例により観察され, さらにロジャース・ラマヌジャン恒等式も紹介されている．これら分割恒等式を組合せ論的考察および母関数の方法で理解していくことが本書の主題のひとつといえる．

第２章　それぞれの条件を満たす分割の集まりの間に全単射が作れれば分割恒等式は証明される．和因子の融合, 等分という操作が導入され「奇数和因子への分割」から「相異なる和因子への分割」の間の全単射が構成され, さっそく上述のオイラーによる分割恒等式が証明されている．この手法で何処まで拡張して行けるかが述べられ, さらに結果の吟味が試行錯誤とともに提示されており面白い．

第３章　フェラーズグラフ, フェラーズ盤 (ヤング図形) を用いて整数の分割が図形で表示される．図形を変形することで条件が付いた分割の集まりの間の全単射が作られ, いくつもの分割恒等式が証明される．恒等式だけでなく, 分割の個数が単調増加なことや フィボナッチ数との大きさの比較といった不等式を導くのにも有用であることが述べられ, 最後にオイラーの五角数定理がフランクリンの着想で証明されている．言葉で言われて不思議なことが図の変形で明瞭になるのは愉快である．

第４章　ロジャース・ラマヌジャン恒等式が発見的, 構成的に観察される．オイラーによる分割恒等式, ロジャース・ラマヌジャン恒等式に見られるパターンが指摘され自然な一般化が予想された後, 妥当性が吟味される．予想の修正版としてアルダーの予想, シューアの定理とその拡張及び検討が述べられる．最後にロジャース・ラマヌジャン恒等式の組合せ論的証明が試みられる．研究

の進め方が拡張の着眼点, 試行錯誤, 失敗に終わる過程とその修正などを併せて開示されている.

第５章　考えている条件を満たす n の分割の個数を q^n の係数に置くことで q のべき級数が作られる．これを母関数という．指数法則をもとにして, 条件付き分割の母関数いくつかが $(1 \pm q^i)^{\pm 1}$ といったものの積を用いた表示に変形されている．分割恒等式両辺の母関数をそういった q の見やすい式で表示することで q の式の等式を得, 逆にこの q の式の等式を直接示すことで分割恒等式が導ける．第１章で述べられ第２章で組合せ論的に証明されたオイラーによる分割恒等式がこの方法で再証明されている．オイラーの五角数定理, ロジャース・ラマヌジャン恒等式も母関数を書き換えることにより q の式の等式として定式化されている．五角数定理の書き換えには二変数母関数と変数の特殊化が有効に用いられていておもしろい．さらにそれから分割数の漸化式が導かれ数表が作られた後, ラマヌジャンの発見が語られている.

第６章　前章で得られた母関数の見やすい表示式を違った仕方でべき級数展開しなおし展開係数を見ることで, ある条件を満たす分割の個数の公式が得られている．ハーディー・ラマヌジャン, ラーデマッハーによる分割の個数の公式に簡単に触れらている．正確な表示は１２章に見られる．大学院生であった頃のアンドリュースにとってラーデマッハーの公式は衝撃的ではじめは信じられなかったが, 理解が進むにつれ, この分野こそ自分が追い求める数学だ, と確信したそうである[1].

第７章　まず二項係数, 二項定理が復習され, 格子路の数え上げと二項係数の関係および格子路とフェラーズ盤 (ヤング図形) の対応が述べられている．それをふまえて, $q-$ 二項係数が長方形に含まれるフェラーズ盤の母関数として定義される．この定義から漸化式, $q-$ 二項定理等が図形を用いて組合せ論的に証明される．あまりに印象的であったので調べてみると, $q-$ 二項係数のこういった定義の発端はポリヤによるようである[2]. $q-$ 二項係数の極限値や二乗和の公式が後の準備として述べられている.

第８章　前章で計算的に示された $q-$ 二項係数の二乗和の公式が組合せ論的に再証明され, 極限を取ることでヤコビの等式が得られている．二変数無限積が計算と組合せ論的考察を用いて調べられ, ヤコビの三重積公式が導かれている．第５章で母関数の等式として定式化されたロジャース・ラマヌジャン恒等式に証明が与えられ, ひとつの一般化も与えられている．組合せ論的解釈と計算の併用が見事である.

---

[1] ロバート・カニーゲル著 無限の天才 (工作舎) p. 330 及び Andrew Sills, Rademacher-type formulas for restricted partition and over partition functions, Ramanujan J. に掲載予定.

[2] Pólya, On the number of certain lattice polygons. J. Combinatorial Theory 6 1969 102–105 及び Pólya, Alexanderson, Gaussian binomial coefficients. Elem. Math. 26 (1971), 102–109. これらは次ページ脚注書３の p. 485 のおかげで知ることが出来た.

第９章から第１１章は関連する話題や一般化が述べられている. かなり駆け足な部分も多いのであるが実例を確認するのは楽しい. 第１２章は述べたかったが述べられなかった話題が詰まっている感じで, 高度な話題, 未解決問題への導入となっている.
そして最後に研究への誘いで本文は終わる.

全体を通して記述はとても丁寧で親切であり, あたたかみを感じる. 各章のはじめには「この章のポイント」がまとめられていて, 章が終わって見直すと的確に書いてあるのがわかる. 新しい定義や考え方が紹介される度に実例や易しい場合の適用例が述べられており, 教師の立場からも参考になった. 各章には演習問題が置かれていて, 内容は簡単なものから 本文の補足や割愛された証明を埋めることなど様々である. 思わず腕試ししたくなるようなものもあれば後回しにしたくなるようなものもある.
組合せ論的考察と母関数の方法のバランスが良い. いくつかの事実にはそれぞれの手法で二通りに証明が与えられ, またあるものは併せ用いて証明される. それでも好みによるであろうから, 例えば計算が好きなら母関数の章から読み, 結果の組合せ論的解釈等を前半に頼る, といった風に読み進むことも出来る.
それも著者達のねらいであろうか, 読み終わってみるともっと語って欲しいという感じがする. 話の続きは参考文献に求められる[3]. 日本語で読めるものも訳者により追加されている. 本書も含めてやはり母国語は途中からでもパッと見て何が書いてあるか捕まえやすく眺め楽しめる, という点でありがたい. 蛇足ではあるが関連する発展的話題は数理物理関係の先生方が書かれた雑誌の記事などにも多く見られるようである. 数理物理学との関係も驚きであるが, 一方で評者は保型形式との関係で興味を持つものであるし, また二次形式の局所密度にも応用や相通じるものを持つようである. 素朴であるのに関わらずと言うべきか素朴さゆえにと言うべきか, このような広がりや深みに興味は尽きない.
本書は本格的に入門したい人にはもとより, 整数の分割に気軽に接してみたい人, いきなり分厚い本はちょっと, という人にこそもってこいと言える. 言われてみれば, あっそうか, といった楽しみに溢れている. 二項係数の漸化式の組合せ的解釈を高校で習ったときの感覚が思い出される. ダイソンは高校時代にハーディー・ライトの分割数の章に魅せられて研究したという[4]. 高校生も読めるであろう本書が訳されたことで, 広く気軽に接することが出来るようになったのは, ありがたく嬉しいことである.

---

[3]加えて Andrews, Askey, Roy, Special functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. xvi+664 pp. も興味深い.
[4]Dyson, A walk through Ramanujan's garden. Ramanujan revisited, 7–28, Academic Press, Boston, MA, 1988 及び Selected papers of Freeman Dyson with commentary の commentary.