会員ニュース

深谷賢治氏の日本学士院会員選出と朝日賞受賞を祝して

北海道大学大学院理学研究院
小野　薫

昨秋に深谷賢治氏が日本学士院会員に選出されたこと，また新春に朝日賞を受賞されたことを数学会会員の皆様は報道などでご存知のことと思います．誠におめでたいことで心よりお祝い申し上げます．深谷氏の研究業績については研究論文やご自身による解説記事をお読みになった方，学会などでの躍動感あふれる講演をお聞きになられた方も多く居られることと存じます．私に書くことのできる部分は限られていますが，御研究の内容に何も触れないという訳にも参らないと思いますので，学士院会員への選出や朝日賞の受賞理由に挙げられている symplectic 幾何学や深谷圏のご研究について少し書かせて頂くことに致します.（以下，深谷さんと書かせて頂きます.）

御本人以外には研究に至る経緯などは分かりませんので，論文などで表から見えるところで書きますと，深谷さんが最初に研究テーマとされたのは 当時 Gromov による研究を契機に新展開を見せていた Riemann 幾何学でした．このテーマの研究を始められたのは山口孝男さんの講演を聞いてからであると深谷さんからお聞きしたことがありますが，日本にはこの分野に優れた研究者が多く居られたことは深谷さんの研究をより活発にしたのではないかと推察します．Riemann 多様体の列の Gromov–Hausdorff 距離に関する収束極限や特に次元が下がった空間に収束する崩壊現象について卓越した業績を挙げられました．また当時，Donaldson の仕事に代表されるゲージ理論の研究およびその低次元トポロジーへの衝撃的な応用が成されていました．この分野でも，深谷さんは向き付けられた３次元閉多様体の instanton homology の構成，instanton homology の連結和公式などの目覚ましい成果を挙げられました．境界を持つ compact ３次元多様体の上で instanton を考える際には然るべき境界条件を置き，Fredholm 的な設定に乗せることが行われますが，無限次元の設定で Lagrange 部分多様体に境界値を取らせることでそれが実現されます．そうした考えは，Atiyah–Floer 予想と呼ばれる，Heegaard 分解が与えられた場合，２つの handlebody に対応して得られる Lagrange 部分多様体のペアの Lagrange 交差の Floer homology と instanton homology が同型になるであろうという 予想の定式化などに現れています．深谷さんは，handlebody に由来するものに限らず，３次元多様体の境界上の平坦接続の moduli 空間の中のあらゆる Lagrange 部分多様体を境界条件として考え，それらを総体的に調べることで境界付きの３次元多様体のゲージ理論を組み立てるプログラムを立てられました．この構想の１つの源は Donaldson の Warwick 大学での講演にあったとのことですが，深谷さんはその考えを深化させて後に提唱される深谷圏の発見へと繋がる研究を進められました.

今述べたゲージ理論の研究の中で Lagrange 部分多様体が現れましたが，一般に symplectic 多様体の中で Lagrange 部分多様体は定義されます．横断的に交わる Lagrange 部分多様体のペアに対してその交点の数を考えます．勿論 Lagrange 部分多様体のホモロジー類の交差数を用いた下からの評価はできますが，それでは単に部分多様体の交差の性質で Lagrange 部分多様体であることが効いていません．Floer homology とは大雑把に次のようなものです．適切な条件の下では，その交点を生成元とする鎖群と Lagrange 部分多様体を境界条件とする然るべき正則曲線を勘定して定義される境界作用素を用いて鎖複体が定義できて，その homology 群として Floer homology が定まります．とくに，交点の数は Floer homology の階数で下から評価できます．これが上記の位相的な評価よりも真に強い結果を与える場合が色々あります．特別な場合として，周期的 Hamilton 系の周期解がすべて非退化である場合の周期解の個数は，空間の Betti 数の和で下から評価できるであろうという Arnold 予想（の弱い形）があります．先ほど,「良い条件の下で」Floer homology が定義できると書きましたが，実は一般には定義できるための障害があります．そのことについては後ほど触れることにします．深谷さんは，ペアではなく，３つ組，４つ組，$\cdots$ に対して，積，あるいはある種の高次の積が決まり，それらが満たすべき性質を然るべき正則曲線の moduli 空間の考察から導きました（A_∞-圏）．これが深谷圏の原型です．有限次元の Morse 理論の場合の対応物 Morse homotopy 理論やその量子化もいくつかの論文の中で考察されています．これが発表された当初は勿論興味を持って迎えられたとは思いますが（深谷さんの論文に目を通していた研究者を何人か知っていますが，私を含めてこの構造が入ることが何を意味するのかが見えなかったことが一つの理由と思いますが）すぐに反応はなかったように思います.（私はその頃海外に滞在していましたので深谷さんのそばでどのような反応があったのかは存じません.）しかし，ほどなく Kontsevich が homological mirror symmetry 予想を提唱した際の片側の主役として深谷圏が現れたことから俄然注目されるようになりました. 1993 年に Kontsevich が Bonn の Arbeitstagung でまだ science fiction なのだがといいながら講演を始めたことを覚えています．後で深谷さんに聞いたところでは，その少し前に深谷さん，古田さんたちが開催した谷口シンポジウムに彼を招待したときに深谷さんが前述の境界付き３次元多様体上のゲージ理論の講演をされ，その中で深谷圏の原型を話されたとのことです．

周期的 Hamilton 系に対応してその time-one 写像のグラフと恒等写像のグラフにより Lagrange 部分多様体のペアが得られ，上記の設定に乗せることができますが，この場合はより直接的な定式化があります．その定式化で Floer の鎖複体が構成できることは Floer, Hofer–Salamon, 私の部分的結果の後で，深谷さんと私の共同研究，G. Liu–G. Tian の共同研究で実現されました．ここでは，正則写像の空間の仮想的基本類を構成することが鍵となります．そのために倉西構造という概念を導入し，その基本理論が作られました．また当時，然るべき条件を満たす正則曲線の数え上げに関わる Gromov–Witten 不変量を一般の symplectic

多様体で構成することも懸案でしたが，これについても同時に解決しました．(J. Li–G. Tian, Ruan, Siebert による仕事もあります.）この共同研究は，1994 年の Newton 研究所での滞在中の議論が切っ掛けで始まりました．Arnold 予想や Gromov–Witten 不変量の構成を一般的に行う際の問題点は何かを私に聞かれ,「負の Chern 数を持つ有理曲線の被覆」の問題を取り扱うことであると答えますと，それにはゲージ理論で培った議論が使えるのではないかと深谷さんは指摘されました．それを聞いたときにはそれだけでできてしまうという感覚が私にはなく，もう少し細かいことを調べる必要があると感じました．実際は深谷さんの感覚が正しく，それに必要な枠組みを整えれば良かった訳です．少し時間が空いて 1995 年の暮れから 1996 年に掛けて議論を完成させました[1]．

倉西構造の理論ができたので，周期的 Hamilton 系の Floer homology だけでなく，先述の Lagrange 部分多様体の交差の Floer homology について持っている理論で何ができるかを考えようということになりました．Yong-Geun Oh さんと太田啓史さんと 4 人でその研究を今まで続けています．前に述べましたように，一般の状況で Floer homology が定義できないことは分かっていました．最初は，symplectic 形式の符号を変える involution の不動点集合として現れる Lagrange 部分多様体とその Hamilton 変形の交点の数に関する Arnold–Givental 予想という問題を狙いました．詳しくは書けませんが，なかなか一筋縄ではいかず未だに部分的な結果を得るに留まっています．一般的な状況で，Lagrange 部分多様体のペアに対する Floer homology が定義できない理由は円板からの正則写像のバブル現象に起因します．そこで，正則円板全体を系統的に扱うことで障害類を定式化し，障害を消す手法の研究を進めました．現在我々が Lagrange 部分多様体に付随する filter 付き A_∞-代数あるいは filter 付き A_∞-双加群と呼んでいるものはこの中で現れます．この代数の中で Maurer–Cartan 方程式を考え，その解があれば，それを用いて元々の Floer の境界作用素を修正して鎖複体を構成することができます．これはある意味では座標変換程度の修正なのですが，入れ物の symplectic 多様体のサイクルを用いた bulk 変形ということもできます．これだけだと何か抽象的な感じを受けられると思いますが，これらのことが実際に有効に使われる場面が，compat toric 多様体の運動量写像のファイバーとして現れる Lagrange トーラスの Floer 理論の研究で出てきます．こうした研究を基に，深谷圏の正確な構成ができることになります．勿論，構想や構成の枠組みは深谷さんがいくつかの論文で与えられていますし，一連の研究での数々の異なる性格の技術的困難を乗り越える際にも深谷さんの独創的な発想がその基盤にあったことは当事者として深く感じています．昨年出版された 4 人による共著の序文の最後にありますように，我々の研究を取り巻く風景はこの研究を始めた頃とは大きく変わり，よ

[1]正則写像の空間を適切に作るには Kontsevich による stable map の概念の導入が重要です．それ以前はしかるべき条件の下で ad hoc な議論をしていました．Kontsevich による stable の空間の扱いは，無限次元空間の中での半無限次元の部分空間の交差として記述するという方針で，このまま数学的に扱うことはできていません．

り興味深くなってきました．

少し私自身が関わる部分が長くなり申し訳ありませんでしたが，他にも symplectic 幾何学に関する限りでも，loop space のトポロジー (string topology) と Floer homology を併せることで，Lagrange 部分多様体の位相的制約が得られることや，余接バンドルの exact Lagrange 部分多様体がゼロ切断と Hamilton 変形で移り合うかという問題への足がかりとなる結果 (Seidel, Smith 両氏との共同研究) などまさに最先端で研究をリードされています．homological mirror symmetry 予想に関しては,「族の Floer homology」のプロジェクトを進められ Strominger–Yau–Zaslow の描像とも関わり合いながら研究の進むべき道を示唆されています．４次曲面の場合には Seidel によって得られていますが，一般の K3 曲面に対する homological mirror symmetry 予想の決着に深谷さんは肉薄されているようです．

今までの稚拙な文章では十分ではなかったかと思いますが，深谷さんのお仕事には独創的な理論の構築と立ちふさがる困難に場合によっては無理筋と思えてもねじ伏せてしまう力強さがあります．共同研究をしていると，深谷さんが様々な数学を自在に持ち出して議論されることがよくあります．そうしたことと関係あるのかないのか分かりませんが，ふと次のことを思い出しました．学部生のときの記憶で不確かなのですが，東大数学科の学部生の発行していた「カーマトーラス」に学生時代の深谷さんが書かれたいくつかの記事がありました．数学的なもの（球面のホモトピーについての概説など）もありましたが,「数学の本を斜め読みする方法」という記事[2]がありました．自分の数学の研究の中でどのような数学が必要となるかは全く分からないので，様々な重要（と思われる）テーマを扱った本格的な本を斜め読みして概略を押さえておこうというような趣旨ではなかったかと思います．途中で現れる例を計算しだしては時間が掛かるので斜め読みできない，従って例は飛ばすなどとも書かれ，最後に「勿論，このような方法は講義のテキストを読む際にはしてはいけない」と注釈も付けられていたように思います．そのような読まれ方をしたのかどうか分かりませんが，いくつもの数学書の書評も書かれていたように思います．深谷さんは学生の頃からの研究対象に接する素朴な態度も持ち続けられているように思います．

周りの研究者に取って深谷さんは大変刺激的な存在です．私に限らず多くの研究者の方々が深谷さんとの議論あるいはもう少し軽く会話からヒントを得たり，楽しまれたりされたことがおありではないでしょうか．深谷さんの周りから様々な形で影響を受けた優れた数学者が育っているように思います.（直接指導される学生の側に立つと，なかなか大変なのではないかとも思います.）深谷さんご自身も今までにも増してご研究を進められ，深谷さんの周りからも良い研究が生まれていくものと確信します．改めまして申し上げます．深谷さんおめでとうございました．

---

[2]私は正確な題名を覚えていませんでしたが，太田さんが現物を見つけられたとのことで題名を教えてくれました．