

# 大学生にきちんと虚数を教えよう

— コーシーの定理を教える前に —

飯高 茂

平成 22 年 3 月 26 日

## 1 虚数をよく知らない学生

S 大学の理工学部で「数学教育法 II」を担当して 7 年になる。学生に模擬授業をしてもらうことを主にして行ってきたが、最大の問題は大学生の数学理解が不十分なことにあることがだんだんわかってきた。

たとえば、学生達は背理法や対偶は知っていてそこそこ使えるがどうして背理法という論法で証明することが正当なのかが全くわかっていない。高校生のときに習ったやり方をそのまま使っているだけなのである。そこで、講義では

「高校でえた知識を大学の数学を学んだ立場から整理し直して、現代数学の視点に立って十分理解してそれから高校数学の教材を検討していかに教えるべきか考えてほしい」

と声を大にしてくりかえし言っている。しかし問題はより深いところにある。大学での数学教育の不十分な実態にその根源があるのである。

大学数学では難しいことやるので内容の理解が不十分なまま先に進む。学ぶ学生にとって数学が消化不良のまま、どんどん進むのである。

例えば複素関数論を教えるとき複素数は高校で十分わかっているものとしてその先を教える。しかし、それでは学生にとって必要なことを教えたことにならない。

標語的にいえば「コーシーの定理を教える前に、複素数で教えることがたくさんある。」

私は線形代数を教えて 25 年になるのだが、固有値の導入やエルミート内積のところで最初に複素数について繰り返し教えるべきだったことを今強く反省する。

## 2 これだけは教えておきたい

### 2.1 虚数の導入

虚数の導入には 2 通りある。多元数としての導入とイデアル論としてのそれである。

最初に数の対  $(a, b)$  を考えてそこに、加法とスカラー倍を定義する。

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), k(a, b) = (ka', kb')$$

さらに乗法を

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ba' + ab')$$

で導入する.  $(0, 0)$  が  $0$  の役,  $(1, 0)$  が  $1$  の役をすることに注意し, 交換法則, 結合法則, 分配法則を確かめることができる. かくしてこれらは可換環の条件を満たすことを確認する.

そして  $(0, 1)^2 = -(1, 0)$  を示し,  $1 = (1, 0), i = (0, 1)$  とおけば  $i^2 = -1$ , であり

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

となることを確かめる.

これはハミルトン (1805-1865, アイルランド生まれの数学者) が複素数を合理的に導入す方法を考えた苦心の賜でこのような考察が発展してベクトルの概念が生まれた.

私は高校1年の頃, 高校の先生がプリントを作ってハミルトン式複素数の導入を教えてくれた.

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$  となることに目を瞠ったことを今でも鮮明に思い出す.

イデアルを使う別の導入もある.  $A = R[X]$  を実数体  $R$  上の1変数多項式環とする.  $X^2 + 1$  の生成するイデアルを  $I$  とおき  $A$  の  $I$  による剰余環を  $R$  とする.

$A$  の元は多項式  $F(X)$  でこれを  $X^2 + 1$  でわり, あまりを  $r(X)$ , 商を  $q(X)$  とおけば

$$F(X) = q(X)(X^2 + 1) + r(X)$$

$r(X)$  は1次式だから  $r(X) = a + bX$  とかける.

剰余環  $R$  においては,

$$F(X) = q(X)(X^2 + 1) + r(X) \equiv r(X) = a + bX, \text{ mod } I$$

$R$  において  $i = X$  とおけば

$$F(i) = q(i)(i^2 + 1) + r(i) \equiv r(i) = a + bi \text{ mod } I.$$

さらに

$$i^2 + 1 \equiv X^2 + 1 \equiv 0 \text{ mod } I.$$

まとめると, 剰余環  $R$  においてその元は  $a + bi$  とかけて  $i^2 = -1$  を満たす.

$a + bi = a' + b'i$  とするとき,  $a - a' + (b - b')i = 0$ .

$a - a' + (b - b')X \in I$  なら  $a - a' + (b - b')X = 0$  となり, 多項式として  $0$  なので係数が  $0$  になる.

よって,  $a - a' = 0, b - b' = 0$ . したがって,  $a = a', b = b'$ .

イデアル論で教えると, 交換法則, 結合法則, 分配法則を確かめる必要がない. それだけ楽な方法である. しかし, 高校生は無論のこと大学生も3年までは環もイデアルも知らない. だからこの方法をそのまま用いて教えるわけにはいけないが, 高校の教科書での  $i$  の導入はイデアル論によって注意したい.

すなわち, 「 $i$  の入った数式を  $i$  を文字として計算し,  $i^2$  があればそれを  $-1$  で置き換えればよい」という高校教科書の便宜的な説明はまさに, イデアル論により  $i$  を導入していると見ることができる.

数学教師として  $i$  の導入を教えるとき, 教科書にある通りの簡単に便宜的な説明をしてもよい. しかしそれがイデアル論により裏づけられている正当な論法であることを知っておいてほしい.

## 2.2 虚数の導入の歴史と矛盾

大学生に虚数をどのように習ってきたかをきくと「虚数はありえない数だけど、数学者はこういうもの考えたんだから、やっておきなさい。」などの説明を受けました、などという。そんな怪しい虚数の理解をしている先生は、理学部で数学をきちんと学んでこなかったせいだ、と数学科の教授の立場からいいたい誘惑にかられるが、そこが不安である。

コーシーの定理は知っていて関数論の単位をとっているが虚数は本当にあるのですか、と疑問を持ちながら先生になっているかもしれない。虚数の存在が怪しいと思いながら教えれば、生徒も自然に向学心を無くす。

3次方程式の解の公式は、カルダノの本 (ARS MAGNA,1545) に公表されたのだそう。実数が係数の3次方程式の解が異なる3実解をもつときも、途中で必要になる分解方程式は2次の方程式で虚解をもつことがわかっている。問題も結果も実数でありながら、解の公式には虚数が避けられない。このようなやむにやまれぬ事情で虚数が数学の歴史に登場したのである。

しかし、 $\sqrt{-1}$  を単純に許すことが数学者にはできなかった。なぜなら

$\sqrt{-1}^2 = -1$  なのに公式  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$  を用いると  $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$  となるので、結果として  $1 = -1$  になり矛盾するので、 $\sqrt{-1}$  を考えるはいけないと忌避された歴史があった。

そこで、 $a, b > 0$  なら  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$  は証明できるが、 $a, b < 0$  なら  $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$  となりこれも証明できることを確認しておきたい。

だから、公式を間違えて使ってしまった結果矛盾がでた。このことに昔の数学者は惑わされたのだ。このようなことを丁寧にやっておくと、数学がおもしろくなるきっかけになるかもしれない。

## 2.3 複素数と順序関係

「複素数には大小がなぜないのですか」という質問も学生からよく寄せられる。その答えは「単に順序を入れるだけなら簡単にできます。」と言ってから次のように説明する。

$$a + bi \geq c + di \iff a \geq c \text{ さらに } a = c \text{ のとき } b \geq d.$$

とすれば、複素数  $\alpha, \beta$  について  $\alpha \geq \beta$  または  $\alpha \leq \beta$  がなりたち、

- $\alpha \geq \beta$  および  $\alpha \leq \beta$  なら  $\alpha = \beta$
- $\alpha \geq \beta, \beta \geq \gamma$  なら  $\alpha \geq \gamma$

しかし、「4則の計算と調和した順序関係は絶対に入りません」。

4則の計算と調和した順序があれば

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ なら } \alpha + \beta > 0, \alpha \cdot \beta > 0.$$

となつてほしい。しかし、 $\alpha = \beta = i$  のとき成り立たない。

「複素整数には、偶数奇数がないのですか」という質問もある。

答えは  $1 + i$  の複素整数倍は偶数、そうはかけないとき、奇数という。そして次が成り立つ。

- 偶数+奇数 = 奇数
- 偶数+偶数 = 偶数,
- 奇数+奇数 = 偶数

- 偶数 × 奇数 = 偶数
- 偶数 × 偶数 = 偶数,
- 奇数 × 奇数 = 奇数,

一般に  $1 + \text{奇数} = \text{偶数}$  が成り立つ. 環  $A$  においてそのイデアル  $J$  の剰余環が 2 つの元よりなるとき  $J$  の元を偶数, それ以外を奇数という.

## 2.4 複素数の分数とべき根

高校数学で, 複素数の加法, 減法, 乗法をしたあとで分数  $\frac{3+4i}{1+2i}$  が出てくる. このことにあまり疑問はないようなのだが, 複素数の分数は定義されていないのである.

「先生,  $\frac{2}{5}$  はたとえばパイを 5 等分してその 2 個分になると理解してイイですね. では  $\frac{3+4i}{1+2i}$  はパイを  $1+2i$  等分してその  $3+4i$  個分になるということですか」

ときいてくる生徒がいるかもしれない. そこで, 次のように言うといいかもしれない.

複素数の分数  $\frac{3+4i}{1+2i}$  とは  $x(1+2i) = 3+4i$  を満たす  $x$  のことである. これを分数の定義とする.  $1-2i$  を  $x(1+2i) = 3+4i$  にかけると

$$x(1+2i)(1-2i) = (3+4i)(1-2i)$$

$$5x = 11 - 2i, \quad x = \frac{11 - 2i}{5}$$

また複素数のべき根, たとえば  $\sqrt[3]{1+2i}$  とは  $x^3 = 1+2i$  を満たす  $x$  のことである. したがって解は 3 個ある. 複素数としてべき根を理解すると,

$\sqrt[3]{1}$  とは  $1, \omega, \omega^2$  のどれかを表すと言うことができる.

とくに  $\sqrt{4}$  は 4 の平方根になり  $2, -2$  のどれかを表す.

## 3 極限

数学 II の模擬授業で微分の導入があり, その前段階で極限の問題, たとえば

$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3$  を求めよ, といった問題が教科書に出ている.

学生は「よくわからないのですが, 代入すればいいんですよ」といい, みなそれで納得していた.

代入すればいいのだが, 極限ではもって回った言い方をしている. そのわけはわからない, と皆言うのである.

高校生の時, きわめて簡単に極限をならい, 不定形にならない限り, 代入すれば極限がもとまる, という理解をしてその結果, 理系入試の手練をへて, 私立大学理学部に入って現在に至っている. 大学での微積分が身につけていないのである.

「高校の時, よく分からなかったのが大学の数学をならって, 本当のことがわかった. 自分が高校の先生になったら, 本当に分かるように教えることができる, その時が楽しみだ」

という気持ちをもつ大学生に育ててほしいものである.

極限の出るところを模擬授業として学生に教えてもらおうと, 大学で習った極限の概念が実は分かっていない, そんなことがばれたりします.

さて、簡単な例を1つあげます。

「6の倍数は3の倍数である」の対偶は？と質問すると、

「3の倍数でない数は6の倍数でない」と大学生は答えてくれます。

「それが真であることを、対偶法を使わないで示してください」

とたたみかけると答えられません。意外にも難問になってしまいます。いろいろな議論が続いた後、

「3は6の倍数ですよ、だって6に $1/2$ をかけると3になる」

という一学生の声が出て、クラス全体が動揺します。仕方がないから、私が

「暗黙の前提というのがあって、こういう問題では、自然数だけを考えることになっているんだ。」

と引き取ります。こんなに基本的なことも分かっていないのですから、前途を思うと暗澹とした思いにとらわれます。

## 4 卒業研究

1985年に学習院大学に赴任したとき、学生に計算機をしたいという要望があるのでそれを叶えてやってほしいという暗黙の要請がありそれに応える形で、プログラミングを主体にする数学のセミナーをするようになった。

理学部数学科でも、4年生の数学の基礎力は高くないので、大学院志望者と一般の学生への指導は分ける必要がある。

- 最初に (『P r o l o g で作る数学の世界』 飯高著) を用いて Prolog Programming の勉強： 練習問題は数学の問題
- 夏休みの課題設定、後で学生にあった問題を相談して決める
- 10月から12月にかけて、問題に応じたプログラムを作りそれを用いて数学の定理を発見し、場合によっては証明する
- 12月から1月にかけて、T e x で論文にまとめ、それが出来たらOHP用に作りかえる。
- 2月の発表会が終了したら (学習院大学内の飯高の) ホームページに公開する
- プログラムの結果、数学的に興味ある現象が見つかるひとどく喜ぶ。
- 結果の数学的証明はできたり、できなかったり。
- 少しでも一般性があれば、定理と言うことにして、定理を発見しようという。
- 見つければ、感激は大きい。
- T e x で論文を書くと、きれいにできて達成感が大きい。

数ヶ月で結果の出る証明もできる問題を学生にあったように見つけるのは至難の業である。しかし、なかなかの力作があるので飯高のホームページで卒業論文をぜひご笑覧していただきたく切に思う。