# 書評：高橋浩樹・著「無限オイラー解析」

小山信也（梨花女子大学 数学科）

数学において，オイラーの成した仕事の偉大さ，膨大さはよく知られるところだ．オイラーの圧倒的な計算力と凄まじい洞察力に驚嘆した経験をお持ちの方は多いだろう．

一例を挙げると，オイラーが，今でいうリーマン・ゼータ関数

$$\zeta(s) = \prod_{p:\ \text{素数}} (1-p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

の値を，いろいろな整数 $s$ に対して求め，$\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の間に成り立つ美しい関係を見抜いた事実は有名である．たとえば，オイラーは $s=2$ の場合に 2 つの値

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{と} \qquad \zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots \underset{(*)}{=} -\frac{1}{12}$$

を求めてそれらの関係を示した．$\zeta(2)$ は「バーゼル問題」と呼ばれた難題で，当時ベルヌーイらをはじめとする多くの数学者が取り組んで挫折した長年の未解決問題[1]であった．$\zeta(2)$ を求めたことで若きオイラーは名を挙げたわけだが，これを越えた仕事が $\zeta(-1)$ であった．いうまでもなく，$(*)$ は普通の計算ではない[2]．現代の数学では，$\zeta(s)$ を複素関数と捉え，解析接続を用いて $(*)$ を正当化する．複素関数論のなかった時代に，オイラーがいかにしてこんな結果に到達したのか，我々には想像すらつかないだろう．

オイラーはこのように，時代を超越した仕事を数多く残している．そこで，通説では後年に発見されたと考えられている数学の中にも，実はオイラーがすでに見出していたものがあったとしても不思議はない．著作物として記述され業績として認知されているよりも多くのことを，実際にオイラーは知っていたのではないか．本書は，そんな素朴な疑問を，著者自身がオイラーの原著を直接ひも解き，独自に解析することによって追求した意欲作である．

[1]拙訳 [3] 最終章「オイラーの生涯 — 人として，数学者，物理学者として」に詳しい．

[2]尋常でないオイラーの計算については [1] が詳しい

したがって，本書は単なるオイラー数学の解説書ではない．収められている主張は著者のオリジナルである．大げさにいえば，数学史に対する重大な問題提起であるとも取れるが，筆致に表れる著者の意図は，そうした野心よりも，むしろオイラーの原著をパズルのように読み解きたいという遊び心に近いものだ．主張は斬新であり，すでにオイラーの数学に慣れ親しんでいるプロの数学者であっても，驚き楽しめる．

一例を挙げよう．現代の整数論では，素数は「正則」「非正則」の二種に分類される．非正則な素数とは，先ほどの $(*)$ の計算を進め，$\zeta(1-2n)$ の値を $n=1,2,3,...$ に対して

$$\zeta(-3)=\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 5},\qquad \zeta(-5)=-\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 7},\qquad \zeta(-7)=\frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5},$$
$$\zeta(-9)=-\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 11},\qquad \zeta(-11)=\frac{691}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13},\qquad \zeta(-13)=-\frac{1}{2^2\cdot 3},$$

と求めていったときに，分子に表れる素因数のことである．$\zeta(-11)$ の値から 691 が非正則な素数であることが見てとれる．さらに続けて求めていくと，

$$\zeta(-31)=\frac{37\cdot 683\cdot 305065927}{2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 17}$$

より，37 も非正則素数である．この 37 が，実は最小の非正則素数で，以後 37，59，67，101, $\cdots$ と無数に続くことが証明されている．非正則素数は円分体の類数を使って定義することもでき，岩澤理論[3]など，現代整数論の中核に直結する概念となっている．

非正則素数の概念に最初に到達したのは 19 世紀中頃のクンマーであるとされる．クンマーはフェルマーの最終定理「$x^p+y^p=z^p$ は整数解 $(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ を持たない」を，$p$ が正則素数の場合に証明した．すなわち $p=37$ は，このクンマーの仕事によってフェルマーの最終定理が解決できなかった最初の素数である[4]．

本書は，オイラーがクンマーの前世紀に，すでに素数 37 の特殊性に気づいていた可能性を主張している．著者いわく，神秘を排除する当時の学界の流れの中で，解明不能な素数の神秘的な性質を公表することは，オイラーの立場上差し控えざるを得なかった．オイラーはこの発見を何らかの形で残しておきたかったため，著作の中に計算誤差（あるいは計算ミス）を装って，意図的にずれた数値を書き残しメッセージを込めた — これが本書で提起される仮説である．

[3]非正則素数とゼータ値の関係を含む岩澤理論の概説は，文献 [2] に見ることができる．

[4]クンマーは，後年，別の判定条件を発見し $p=37$ の場合も証明した．なお，この点は栗原将人氏（慶應大）にご指摘頂いた．ここに感謝の意を表したい．

たとえば，最初の非正則素数 37 は，ゼータ値 $\zeta(2n)(1-2^{-2n})$ の計算誤差に現れる．オイラーは 1745 年頃の著書「無限解析入門」でこの値を $n=1,2,3,...,22$ に対して求め，それを次のように，$A,B,C,...$ と表示している．

$$
\begin{aligned}
A &= 1.2337005501361698273543 1 \quad (n=1\text{ のときの値})\\
B &= 1.0146780316041920545462 5 \quad (n=2\text{ のときの値})\\
C &= 1.0014470766409421219064 7 \quad (n=3\text{ のときの値})\\
D &= 1.0001551790252961193029 8 \quad (n=4\text{ のときの値})\\
E &= 1.00001704136304492\underline{550816} \quad (n=5\text{ のときの値})\\
&\cdots .
\end{aligned}
$$

著者の再計算によれば，$E$ の末尾の下線部 5 桁のみが真の値と異なっており，他の 21 個の値はすべて正確であった．下線部の正しい値は 48818 であり，下線部との差は 1998．これが $1998 = 37 \times 54$ と，37 を素因数に持つことから，ここにオイラーが神秘の素数 37 を隠したのだろう — これが本書の主張のひとつである．オイラーは，自分の名 Euler の頭文字 $E$ の数値に誤差を持たせることにより，メッセージを込めたのだろうか．

本書は，こうした方法で，オイラーの原著に潜む計算誤差を解釈し，他の非正則素数も発見している．著者はまた，三角関数の値の計算誤差にも注目し,「三角関数 → 弦 → 音楽」との連想から，それらの誤差が何らかの曲の旋律を表す可能性を示唆している．これらは一見，数学界の常識に立ち向かうような主張にも見えるが，本書で展開される議論は，新事実の立証よりも，著者がオイラーの原著を味わい楽しんでいることに力点が置かれているといった印象を受ける．

奇抜に見える本書の仮説も，オイラーの業績を考えれば，決して荒唐無稽ではない．素数 37 は $\zeta(-31)$ の分子に現れるわけだが，そもそも $\zeta(-31)$ を初めて計算したのはオイラーだった（ただし，知られている限りの文献では，分子が素因数分解されていない）．また，本書では触れられていないが，クンマーが解決した正則素数に関するフェルマーの最終定理も，複素数の整数（今でいう代数的整数）の素因数分解を用いるという証明の基本的な着想は，オイラーのものだった．オイラーはこの発想により，$p=3$ の場合にフェルマーの最終

定理を証明した[5]人物である．したがって，この点からも，オイラーが実際には $p = 3$ 以外の場合にもある程度考察を進めていたと考える方が自然であろう．そうだとすれば，クンマーに立ちはだかった「非正則素数の壁」は，オイラーがすでにぶつかっていたものであった可能性は十分にある．

本書は入門書ではないので，これからオイラーを学ぼうとする人，オイラーを通して数学の一般的な教養を身につけたい人には，向かないかもしれない．しかし，本書には，原著を直接ひも解くことの喜びが満ち溢れている．あらゆる種類の入門書や解説書が氾濫する昨今，実際に原著を手に取る機会は，専門家にとってすら少なくなった．だが，原著の迫力というものは，それを直接肌で感じた者にのみ感動を与える．そしてその感動こそが，学問を発展させる原動力であるといっても過言ではない．

原著の価値を尊重することは，初学者から研究者まで，すべての人々が共通して守るべき，学問の礼儀である．本書には，オイラーの原著の各ページの写真が何十点も掲載されているが，それも学問における，あるべき態度と喜びを思い出させてくれる．原著に触れる追体験のできる一冊として，一般の読者も含めすべての人々にお勧めしたい一冊である．

## 参考文献

[1] 黒川信重・著「オイラー探検」（シュプリンガー・ジャパン）2007 年.

[2] 黒川信重・栗原将人・斎藤毅・共著「数論 II 岩澤理論と保型形式」（岩波書店）1998 年.

[3] ナーイン・著（小山信也・訳）「オイラー博士の素敵な数式」（日本評論社）2008 年.

[5] 拙訳 [3] 第 1 章「複素数」に詳しい.