大槻知忠氏の日本学術振興会賞受賞に寄せて

この度，大槻知忠氏が第四回日本学術振興会賞を受賞されました．心からお祝いの言葉を申し述べたいと思います．

大槻氏は，授賞理由の「結び目と 3 次元多様体の不変量の研究」において世界的なリーダーの一人として活躍を続けておられます．今回この記事を書かせていただくのを機会に，大槻氏のこれまでの研究業績や，その背景について少し調べてみたのですが，改めて大槻氏の発想の柔軟さや計算力の力強さ，仕事のスケールの大きさに感銘を受けました．

大槻氏はこれまでに 1998 年度日本数学会幾何学賞および 2003 年度日本数学会賞春季賞を受賞され，ご本人による解説記事 [1][2] と河野俊丈氏による業績紹介の記事 [3] があります．研究の詳しい内容はそれらの記事および，それ以後の成果については最近の論文を参照していただきたいと思います．ここでは，同じトポロジーの中ではありますが，少し専門が離れた立場からの感想を書かせていただきたいと思います．

結び目や絡み目の研究は長い歴史をもっていて，多くの研究成果が積み重ねられてきています．その中で，専門外の人でも知っている有名な事実を挙げるとすれば，Gauss による linking number の積分による定義・表示と，Alexander による結び目の Alexander 多項式の発見があると思います．前者は 3 次元球面内に埋め込まれた二つの互いに交わらない S^1 の絡み具合を表す数（絡み目数と呼ばれる）を，ある自然な積分により表したものです．Gauss が遺した幾何学上の成果として，曲面の曲がり具合を表す Gauss 曲率や Gauss 写像と並んで有名なものです．一方，後者は 1920 年代に発見された結び目の不変量で，驚くほど多くの不変量が定義されている現在でも，最も基本的な不変量の地位を保っているものと思われます．

結び目はその名前の通り日常的にも現れる親しみ易い対象であり，結び目理論は幾何学の一分野として特異な位置を占め続けて来ています．しかし数学全体の中でのその重要性が改めて認識されたのは，1984 年 Jones による Jones 多項式の発見のときではなかったかと思います．この発見は，結び目理論はもちろんのことですがトポロジーを超えて広く数学界に大きな衝撃を与えました．作用素環論という全く異なる分野の理論を用いて，予想を完全に超えた不変量が構成されたためです．この少し前の 1982 年には，Donaldson によって 4 次元多様体に関する驚くべき結果が発表されました．この仕事も従来のトポロジーの枠組みを超えた，ゲージ理論を用いた議論によるものでした．今から振り返ると 1980 年代の前半は，数学とくに幾何学を巡って大きな新しい潮流がまさに流れ始めた時期でした．この流れは現在に至るまで続いていますが，大槻氏の仕事はその中でなされた第一級のものだと思います．

1988 年 Witten は，Jones 多項式に 3 次元的および物理学的解釈を与え，それを基に結び

目に限らずすべての3次元多様体への一般化を示唆しました．次いでVassilievは1990年に結び目全体のなす空間を考え，そこに特異点論を適用することにより，今に言うVassiliev不変量（有限型不変量）の考えを提出しました．結び目不変量＝ S^1 の3次元空間への埋め込み全体のなす空間の0次元コホモロジー群の元，という自然ではありますが，大胆な発想で成功を収めたものです．1993年にBirman-LinはVassiliev不変量とJones多項式を初めとする量子不変量の関係を明らかにし，Vassilievの考えを結び目理論にとって身近なものにしました．さらにKontsevichは同じ1993年，すべてのVassiliev不変量を積分により実現するという驚くべき結果を提出しました．これはGaussによるlinking numberの積分表示の究極の一般化ということができるかも知れません．この不変量はKontsevich積分と呼ばれています.

このような時代背景のもとで大槻氏の名前が一躍有名になりだしたのは，ホモロジー3球面に対して有限型不変量の考えを提案し，またCasson不変量と呼ばれるホモロジー3球面の重要な不変量を第一のものとする，無限個の不変量の系列を定義された頃でしょうか．これらの不変量は現在大槻不変量と呼ばれています．論文の出版はいずれも1996年のことでした．そして間をおかずにT. Le，村上順両氏との共同研究による全く一般の3次元多様体に関する不変量の理論を提出されました．論文の出版は1998年ですが，仕事が完成されたのは1996年頃のことと思われます．この不変量は著者達の頭文字をとってLMO不変量と呼ばれるようになり，極めて強力な不変量として名高いものです．これらの研究の背景には，葉廣和夫氏のクラスパー理論およびGoussarov氏の理論を初め，村上斉氏やGaroufalidis氏等の深く関連する仕事があります.

大槻氏の仕事を敢えて一言でいえば，結び目に関する不変量の理論を，一般の3次元多様体およびその中の結び目に対して大きく“一般化”した，ということができるかも知れません．しかし，単なる一般化を超えた真に本質的な前進であったと思います.

これらの画期的な仕事が極めて高く評価され，1998年のベルリンにおける国際数学者会議では，トポロジー部門の招待講演者として講演されました．また2001年度には，京都大学数理解析研究所において年間のプロジェクト研究「21世紀の低次元トポロジー」を中心的な主催メンバーとして遂行し，世界各国からの研究者との活発な交流を果たしました．このプロジェクト研究の成果はGeometry and Topology Monographs Volume 4 (2002) “Invariants on Knots and 3-Manifolds (Kyoto 2001)”として出版されております．その中に収められている大槻氏の編集になる問題集“Problems on knots and 3-manifolds”は，それ以後のこの分野の研究に大きなインパクトを与え続けています．更に，2006年のマドリードにおける国際数学者会議の際には，トポロジー部門の招待講演者を実質的に決めるPanelメンバーの一人として活躍されました.

初めに述べた大きな新しい潮流はその後も続き，KhovanovによるJones多項式のcategorificationの理論（不変量からホモロジー論へ），Ozsváth-SzabóによるHeegaard-Floerホモロジー論の展開と結び目理論への応用等，画期的な仕事が現れています.

一方，言うまでもないことですが，PerelmanによるHamiltonのRicci流を用いたPoincaré

予想，さらには Thurston の幾何化予想の解決という，何十年に一度あるかないかの大きな展開がごく最近ありました．トポロジーにとって大きな節目であることは間違いないと思われます．しかし，例えば 3 次元多様体論が終わりに近付いているということには決してならないと思います．このことは 2 次元，すなわち曲面（Riemann 面）の場合を考えれば明らかです．閉曲面の位相的な分類は 20 世紀初頭には終わっていましたが，その後の展開は曲面を巡る理論に終わりはないことを示しています．

3 次元多様体や結び目の不変量を巡っては，大きな未解決問題が山積しているようです．専門外の筆者でもたいへん興味深い問題を挙げさせていただくと，Jones 多項式が自明な結び目は unknot だけか？　結び目の Kontsevich-Vassiliev 不変量は完全か？　ホモロジー 3 球面の LMO 不変量は完全か？　一般に LMO 不変量の各項を一斉に記述する方法はあるか？　あるいは，LMO 不変量と幾何化予想の解決との関連，とくに体積予想を初めとする，体積（Gromov の simplicail volume）や η-不変量等の 3 次元多様体の超越的不変量と有限型不変量との関連，等々の解明です．

こうした中で大槻氏は着実に研究を進められ，Kontsevich 不変量のループ展開や，Betti 数が正の 3 次元多様体に対して精密化された LMO 不変量の定義を与える等，著しい成果を挙げられています．

大槻氏の研究のますますの発展を期待して，筆をおくことにいたします．

参考文献

[1] 大槻知忠, 結び目と３次元多様体の有限型不変量,「数学」, ５２巻１号, 2000, 53-66.

[2] 大槻知忠, 結び目と３次元多様体の不変量,「数学」, ５５巻４号, 2003, 337-349.）また同号には「数学」, ５２巻１号, 2000, 53-66.

[3] 河野俊丈, 大槻知忠氏の業績ー有限型位相不変量の新しい展開,「数学」, ５５巻４号, 419-424.

森田茂之（東京大学大学院数理科学研究科）