リフレッシュ/湘南数学セミナー！

横浜国立大学教育人間科学部　根 上 生 也

●はじめに

「湘南数学セミナー」とは，日本数学会の社会貢献事業の 1 つとして例年クリスマスの時期に開催されているイベントです．高校生と著名な数学者が合宿をしてセミナーを行うというもので，それに付随して一般市民を対象とした「現代数学市民講座」も行われます．今回（2007 年度）は，「**数学探偵セイヤの XMath/4 次元からの贈り物**」と題して私（＝根上）が講師を務めました．さらに市民講座のタイトルは「**計算しない数学**」です．記録のために，詳しい日時と場所を記しておきます．

湘南数学セミナー　12 月 23 日（日）14：00～12 月 24 日（月）12:00
現代数学市民講座　12 月 24 日（月）14：00～16：00
場所　湘南国際村センター（〒240-0198 神奈川県三浦郡葉山町上山口 1560-39）

会場となった湘南国際村センターは眼下に相模湾を，そして，その上に富士山の全形を眺望できる葉山の丘の上にあります．交通の便はあまりよくありませんが，センターにはセミナー室やホールに加え，すてきなレストランもあり，豪華なホテルといった雰囲気で，とても贅沢な気分になれます．都会の雑踏から離れて，数学三昧の時間を過ごすには最適かもしれません．

実は，このイベントの参加者数は年々減少し，昨年の「セミナー」の参加者はたったの 4 名，「市民講座」の方は 76 名だったそうです．この状況を打開すべく私が登用されたと勝手に解釈をして，あえて上のようなタイトルで参加者を募集しました．その結果，今回は「セミナー」には 28 名，「市民講座」には 127 名の参加者が集まりました．これは，昨年「たけしの誰でもピカソ」に出演してそれなりに一般の方にも顔の知れた私のおかげだと自負していますが，広報を担当されていた福井敏純先生（埼玉大学）のご尽力の効果も大きかったと思います．

現代数学の最先端のテーマをわかりやすく紹介するという講座の趣旨からすると，私の専門である「位相幾何学的グラフ理論」の最近の話題をお話すべきところでしょうが，「セミナー」では 4 次元を直観することを，「市民講座」では計算偏重の学校数学と対峙する新しいスタイルの数学を紹介することを目標に話をしました．数学者が期待するところの現代数学とはかけ離れた内容ですが，現代に生きる「私」という数学者の生き様は存分に紹介できたと思います．その一部始終をここでも紹介することにします．

湘南数学セミナー初日

このセミナーの目標は，４次元空間とは何なのかを理解し，それを直観できるようになることです．標語的に言うと「４次元を見よう！」ということになりますが，はなから４次元空間など見えないと思い込んでいる人も多いでしょうね．しかし，私と私の弟子の一部は４次元空間が見えます．その「見える」という感覚をセミナーの参加者のみなさんにも体験してもらいたい．そのために，数学的な考察をしたり，４次元物体の模型を作成したり．自分の手と頭を動かして，その感覚をつかんでもらおうというわけです．

そのお手伝いをしてもらうために，横浜国立大学教育人間科学部のマルチメディア文化課程から上山桂奈さん，松田美佳里さん，村本真菜さんを連れきました．その中でも上山さんは４年生で，４次元空間が見える「四次元少女」として「誰でもピカソ」に登場した逸材です．松田さんと村本さんはまだ１年生ですが，私の「トポロジー」という授業を受けて４次元空間を見ることに興味を持ってくれました．でも，担当はカメラとビデオ撮影の係りです．

会場は 50 名程度を収容できるふつうのセミナー室といった感じの部屋で，正面の壁一面がホワイトボードになっています．とはいえ，私はホワイトボードを使って講義をするつもりなどありません．スクリーンを下ろし，プロジェクタを設置して，パソコンにつなぎ，スピーカも用意しました．そして，私が出演した「誰でもピカソ」の録画を上映して，参加者が集合するのを会場の外で待っていました．

14：00 から開会式が始まれることはわかっていたので，録画の上映時間を調整して，絶妙なタイミングで私が参加者の前に姿を現すようにしました．今まさにテレビで見ている人がそこに現れるというは，ちょっと驚きですよね．そんな演出をするのも，これから行われるセミナーが普通の数学の授業ではないということを印象付けるためです．

さらに，湘南国際村センターの方から会場や宿泊に関する説明があった後，スクリーンに映し出された「数学探偵セイヤ」のロゴを背景に前へと歩み出た私は，開口一番，「みなさん，こんちは！」と叫びました．でも，最初は反応が悪いのは想定内です．そこで，反応が悪いからとやり直しを求め，参加者全員で「こんにちは！」と挨拶をします．これで全員が口を開く準備ができました．で，こういうことを怠ると，最悪な場合には先生が一人で講義をしているだけという事態に陥ってしまいますからね…．

いずれにせよ，「数学探偵セイヤ」は２年以上前に放送されていた番組の１コーナーだったので，知っている人も少ないだろうからと，その第１話を見てもらいました．甲子園の春の選抜野球大会では何試合が行われるのかをテーマにしたお話です．その中で探偵に扮した私は負けチームと試合を対応させて考えれば，試合数＝出場チーム－１となることをわかると説いています．

続いて，私が「計算しない数学」を提唱していることなどを話しながら自己紹介をしていると，最前列に座っていた可愛い女の子がノートをとり出しました．それを目撃した私

は，「ノートをとるのは禁止！」と言い出したのです．絶対にとるなとは言わないけれど，ノートをとることに専念して，自分の頭で考えなくなっては意味がない．学校の授業とは違うのだから，ノートなんかとらなくていいと檄を飛ばします．

とはいえ，あまり厳しく言っても女の子を傷つけてしまので，やさしい先生という雰囲気もかもしだしながらその女の子と会話を交わして，自己紹介をしてもらいました．その子とその隣に座っていた女の子があまりによく似ていたので，「双子ですか？」と聞いてみると，双子ではないけれど，姉妹であることが判明．

二人の自己紹介が終わった後，さて今度は誰が自己紹介をするのか．でも，私は次の人を指名しません．みなさんを大人扱いするからと宣言した上で，自発的に次の自己紹介をする人が現れるのを待ちます．幸い，前列の別のテーブルに座っていた男の子が自己紹介をすると言い出したので，いい感じです．その後はうまい具合に自己紹介の流れが続いていきました．

そして，わかったことは数学が得意なわけではないけれど，このセミナーに参加している人が多いということです．もちろん，いかにも数学ができそうな人もいましたが，受験数学や計算は苦手だけれど数学は好きだという人もいました．かつて私の講演を聴いたことがあり，おもしろかったから参加したという人もいました．参加者は全部で 28 名．その内訳は，高校生が 18 名，中学生が 9 名．そして，私の追っかけをしている高校の先生が 1 名です．

そうこうしているうちに，最初のセッションを始める時間になってしまったので，休憩をとらずに，セミナーを始めました．

●14:30～15:30　４次元空間ってなんだ？

このセッションの目的は，４次元空間とは何なのかを理解することです．幸い，日本の子どもたちはドラえもんのおかげで「４次元」という言葉を知っています．ドラえもんのおなかに付いている「４次元ポケット」，タイムマシンが時間旅行をするときに通過する「４次元空間」．しかし，言葉としては知っているけれど，それが何を意味しているのかを知っているわけではない．

そこで，講義を始める前に，私の原作を映画化した『小さくなぁれ』と題する約 15 分のショートムービーを見てもらいました．それは引きこもり青年が「遠近法」という法律を守れず，遠くに行っても正しく小さくなれないという設定で展開されるストーリーです．その中で，４次元真理教の教祖が人間の大きさが変化する理由を４次元空間を引き合いに出して説明するというシーンがあります．４次元空間とは何なのかがわかっていないと，その説明はちんぷんかんぷんでしょう．また，主人公が「４次元空間を空間に時間の加わった世界じゃないんですか」と言うのを「ＳＦの見すぎじゃ！」と一喝するシーンもあります．４次元空間を理解する上で，このやりとりは重要です．

線型代数を勉強した人間にとって，４次元空間の第４の軸も他の軸と対等であることは

当たり前です．それは決して時間軸ではありません．もちろん，第４の軸を時間軸だと解釈することにも意味はありますが，それはあくまで物理学で言うところの「４次元時空間」であって，数学者が言うところの「４次元空間」ではない．ドラえもんのタイムマシンが通っていくところは４次元時空間だけれど，第４の軸が時間軸だと解釈してしまうと，無数の道具を入れられる４次元ポケットの仕掛けは理解できない．

こんなことを前置きにして，４次元空間とは数学的にどんな空間なのかを解説していきます．とはいえ，相手は中高生なので，線型代数的な説明はしません．

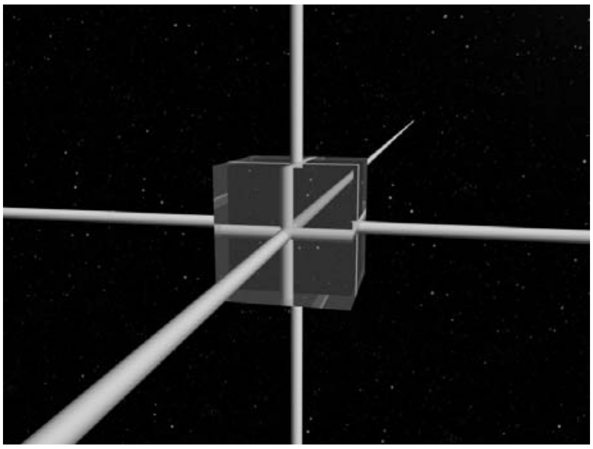
４次元空間とは独立な４つの方向が存在する空間である．
それは，４本の座標軸が存在する世界で，４つの座標を使って点の位置が指定できる。

言葉ではこう言えるけれど，言ったところで意味がわからない．普通の言葉ならば，言われればそれなりにわかるけれど，数学的な記述は必ずしも意味がわからない．でも，そこにはきちんとした意味がある．普通の言葉なら，日常的な生活の中で意味の獲得ができるけれど，数学的な言葉ではそうもいかない．しかし，数学的な言葉は日常的に体験できること以上のことを表現してくれる．それが表現していることの意味を自分のものにできるとしたら，凄いことではないか．

日常的な生活や普段目にする世界だけに執着するのではなくて，それを超えて存在しているものに直観して，意味が理解できたら，どんなにすばらしいだろう．私が中学生のときに４次元空間について書かれた本を読んだことがあるのだけれど，それによるとどうやら４次元空間が見える人がいるらしい．ならば，自分も４次元空間が見える人間なろう．そう決意して数学の勉強を始めたんだよ….

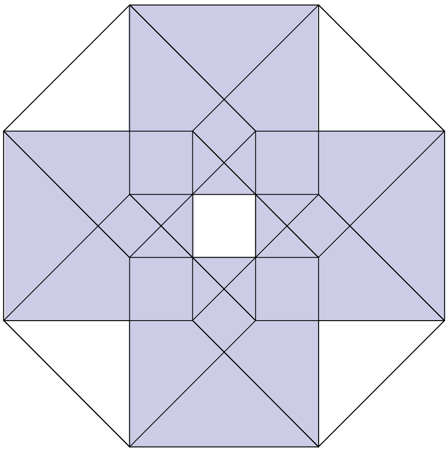
こう熱く語りながら，０次元空間は点だけ，１次元空間は直線，２次元空間は平面，３次元空間は３本の座標軸が直交する普通の空間であると述べ，それぞれの空間における座標とは何かを説明した上で，では，４次元空間は…と話を進めていきました．そして，第４の軸は時間軸ではなく，３次元空間からはみ出す方向に伸びる軸だと強調します．

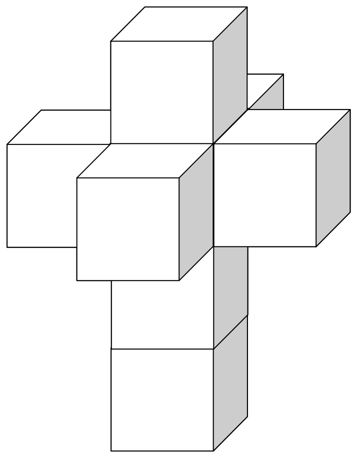
この「３次元空間からはみ出す方向」を理解してもらうために，またまたムービー（右図）．宇宙空間に浮かぶ３本の座標軸がスクリーンに映し出されます．立体感を強調するために，原点を取り囲むようにクリスタルのような立方体をはめ込んであります．その座標軸がゆっくりと３分間回転します．ちなみに，このムービーは私の博士課程の学生である星野好晃君が作ってくれました．ちなみに，彼も４次元が見えます．



この映像を見れば，誰だってスクリーンの中の世界が３次元空間だと思う．それならば，３次元空間からはみ出る方向というのは，このスクリーンからはみ出る方向だ！　そう言いながら，私は原点においた人差し指をスクリーンから離して，参加者の方へと動かしていくのでした．その軌跡はスクリーンと垂直に伸びる直線を描きます．それこそが４次元空間の第４の座標軸．つまり，みんなは４次元空間の中にいて，３次元空間を見下ろしていることになるんだよ．わかったかな？

これで第４の軸が時間軸ではないということの意味はわかったとしても，４次元空間の中の４本の座標軸が互いに対等なものだという感じはつかめないでしょう．そこで，４次元空間の中の四角い図形を考えてみることにします．





点が動いて線分になり，その線分がそれと垂直な方向に動いて正方形になる．さらに，その正方形が奥行きの方向に動いて立方体になる．そして，その立方体がスクリーンからはみ出る方向に動いた軌跡としてでき上がるものが**４次元立方体**と呼ばれる図形です．簡単にいうと，４次元空間におけるサイコロの形．その４次元方向にはみ出た部分を斜めにスクリーンに射影して描いてみると，こういう図（上左図）になります．つまり，これが４次元立方体の絵というわけです．

この絵をよく見ると，平行に並ぶ立方体の対が４組発見できます．つまり，４次元立方体は８個の立方体を組み合わせて構成できる図形なんですね．その隣接関係を考えて，８個の立方体を３次元空間の中で組み上げてみると，こういう立体図形（上右図）ができ上がります．実際はスクリーン上の図だけでなく，持参した巨大は模型も利用して説明しました．

これが４次元立方体の展開図です．もちろん，この立体図形は完成形ではありません．直角に交わっている正方形どうしをすべて貼り合わせないと，本当の４次元立方体にはなりません．残念ながら，その貼り合わせはこの３次元空間では実行できません．そもそもこの４次元立方体の展開図はカチカチでどこも曲がりそうにないので，これ以上どこかとどこかを貼り合わせろと言われたところで，無理….

そう思うかもしれないけれど，４次元空間の中ではこのカチカチな図形を折り曲げることができて，閉じた図形になるのです．たとえば，普通の立方体の展開図を考えてみましょう．立方体は３次元空間の中に存在する図形ですが，その展開図は平面の世界に置くことができます．そして，その平面の世界ではそれを組み立てることができない．仮に平面の中に知的生命体がいたとして，その展開図を見ているとすると，「こんなのカチカチでどこも曲がらないよ」とぼやいているでしょう．でも，３次元空間に住んでいる私たちにとって，立方体の展開図を平面からはみ出る方向に折り曲げて，閉じた立方体を作ることは簡単です．それと同じように，カチカチと思える４次元立方体の展開図も４次元空間の中では曲がるのです．

この説明に納得してくれる人はけっこういます．そして，まるで雲をつかむようだった４次元空間のことがちょっと身近に感じられるようになるのでした．３次元空間からはみ出る方向が意識できれば，４次元空間がわかる．そう思ってもらったところで，３次元空間からはみ出る方向を活用する練習をしてもらいました．つまり，その発想のもとで，４次元空間でできることを考えてみたのです．

４次元空間でできること
① ３次元空間を見下ろせる．
② ３次元空間を無数に積み重ねられる．
③ 蓋を開けずに、箱の中身が取り出せる．
④ 内臓に触れる．
⑤ ２つの平面が１ 点で交わる．

まず，①については，すでに経験済みです．②については，第４座標を変化させることで，無数の３次元空間が交わらずに配置できることがわかります．これがドラえもんの４次元ポケットの原理だと考えてもよいでしょう．③と④は基本的に同じことです．③の場合は，箱の中身を４次元の方向に持ち上げて，少し移動してから下ろしてやれば，箱の外に出すことができます．箱を人間の体だと思えば，外に出さないまでも内臓に触れられることになります．最後の⑤は，４本の座標軸を２本ずつ組にしてそれぞれの組が決定する平面を考えてみれば想像できます．その２つの平面は原点だけでしか交わっていません．でも，その様子を理解するのはかなり難しいようです．

どの説明もパワーポイントのアニメーション機能を使って丁寧に説明したのですが，はたしてどのくらいわかってもらえたのでしょうか…．いずれにせよ，聞いているだけではなかなか理解できないでしょう．そこで，今度は参加者のみなさんに問題を考えてもらうことにしました．４次元空間では次の⑥～⑨までの現象が起こります．それはなぜかを説明してください．

⑥ 壁際で縄跳びができる．
⑦ 絡んだ２つのリングを引き離せる．
⑧ クラインの壺が作れる．
⑨ 丸い宇宙が存在する．

さらに，次のことも考えてみましょう．よくオカルトっぽい話に４次元空間が登場することがありますが，はたして４次元空間が存在したとすると，⑪～⑯のようなことができるのでしょうか．今度の問題はあくまで疑問文で，その真偽は定かではありません．

⑪ スプーンが曲がる？	⑭ 壁抜けができる？
⑫ 瞬間移動ができる？	⑮ 心霊手術ができる？
⑬ 幽体離脱ができる？	⑯ 物体の大きさを変えられる？

参加者をいくつかのグループに分けて，問題を分担して考えてもらい，明日の朝のセッションで説明してもらうことにしました．どこまで考えてきてくれるかが楽しみです．

●15:40～16：40　４次元空間に浮かぶ丸い図形

２つ目のセッションは，このセミナーの最後に触れることになるポアンカレ予想を意識して，４次元空間に浮かぶ丸い図形（＝３次元球面）について解説しました．

そもそも，丸い図形とは何なのか．「角がない図形」，「回転の軌跡」などと言えますが，やはり「定点から等距離の点の集合」と考えるのが一番妥当でしょう．つまり，コンパスが描く図形です．それを平面上で描けば円になるし，空間で描けば球面になる．では，４次元空間で描いたらどうなるのか．

それを説明するためには，４次元空間に距離を導入する必要があります．だからといって，線型代数でやるように，天下り的に距離の定義を与えてしまったのでは，「４次元を見よう！」を目標としているこのセミナーの趣旨に反してしまいます．確かに４次元空間の距離はこうなるべきだという理解を生まないといけません．

そこで，まず三平方の定理を復習して，それを４次元立方体の対角線の長さを求めることに応用してみました．１辺が１㎝の正方形の対角線の長さは２辺が１㎝の直角二等辺三角形の斜辺の長さと同じだから，$\sqrt{2}$ ㎝ になり，その正方形を底面とする立方体の対角線の長さは，$\sqrt{2}$ ㎝ と１㎝ の辺を持つ直角三角形の斜辺の長さに等しく $\sqrt{3}$ ㎝ になります．この考え方を繰り返して，４次元方向にはみ出ている直角三角形に三平方の定理を適用すれば，その斜辺の長さ＝４次元立方体の対角線の長さが $\sqrt{4}$ ㎝ になることがわかります．

ということは，４次元のサイコロを水平に持てば幅は１㎝ なのに，斜めに持つと幅が２倍になるということです．さらに同じ考え方を繰り返していけば，n 次元立方体の対角線の長さは $\sqrt{n}$ ㎝ になります．たとえば，100 次元立方体なら対角線の長さは 10 ㎝ に，10000 次元立方体なら 100 ㎝ になるということです．つまり，10000 次元空間では，横から見ると１㎝ にしか見えないサイコロが回転すると１ｍ にまで巨大化するのです．恐ろしい．単に式で答えを出すだけでなく，その意味を考えてみると，おもしろくなりますね．

この４次元立方体の対角線の長さの求め方がわかれば，４次元空間における２点間の距離も，平面や３次元空間の場合と同じように，座標を使って計算できることが理解できるでしょう．特に，原点からの距離は点の座標の平方和のルートです．したがって，原点を

中心とする半径 r の丸い図形は次のように表されることになります．ここでは慣例に従って第４座標を t としていますが，もちろん，それは「時間」ではありません．念のため．

３次元球面　$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2\}$

このように対象が数式で表現できてしまうと，いろいろなことがわかってきます．たとえば，t の値を r から０まで変化させてみると，３次元球面の天辺は１点だけで，それがだんだん膨らんでいって，最後には半径 r の普通の球面になることがわかります．１点が膨れて球面になる様子を３次元空間の中で考えれば，その軌跡全体は普通の球体（中身の詰まった球面）になります．ということは，４次元空間に浮かぶ３次元球面の上半分は球体と位相同型になっているということです．それは下半分についても同じです．つまり，３次元球面を $t = 0$ の球面で分割すると２つの球体になるということです．逆に言うと，２つの球体を用意して，その表面を貼り合わせれば，３次元球面が復元できることになりますが，それは３次元空間内では不可能です．

こういう理解が得られれば，３次元球面の中に入るとどんな世界が見えるかもわかるでしょう．あなたは３次元球面を２つの球体に分割する巨大な球面の上に張り付いて一方の側を見ています．つまり，あなたの前面にはその球面が縮小して１点になるまでの空間が控えています．逆に言うと，ある１点を取り囲む小さな球面がだんだん膨張していき，あなたが張り付いている巨大な球面に重なります．さらにその球面が膨張する様子を見届けようと後ろを振り返ると，その球面は膨張どころか縮小に転じていて，最終的には１点にまで潰れていきます．

球体３個で３次元球面になるという事実はたいていの人がわかってくれますが，膨張を続けた球面がいつの間にか縮小に転じるという現象はなかなか受け入れられないようです．決して球面が裏返るわけではないのですが，いったいいつ裏返ったのだろうと疑問に思うのだそうです．普通の球面上で起こることと同じなのですが…．北極を取り囲んでいた小さな円周が膨張を続けていくと，赤道に通過した時点から縮小に転じ，最後には南極を取り囲む小さな円周になりますよね．

●16:50〜17:50　４次元物体の影を作る

丸い図形の類似品として正多面体を考えて見ましょう．いわゆる正多面体は全部で５種類です．正四面体，立方体（＝正六面体），正八面体，正十二面体，正二十面体．面数が多くなるほど球面に近づいていきます．これと同じことを４次元空間で考えるとどうなるでしょうか？

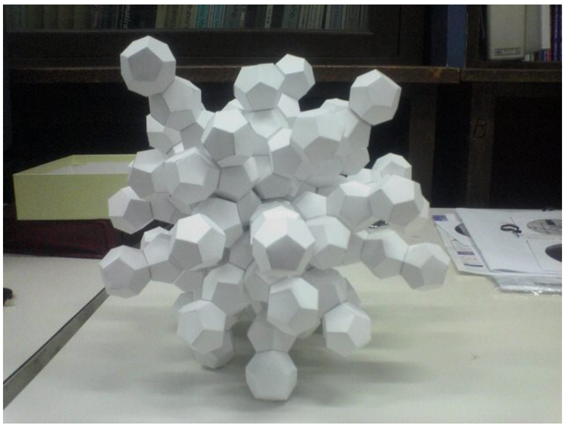
３次元空間内の正多面体は正多角形を集めて作った立体図形です．これを発展させて考えると，４次元空間では正多面体を集めて対称的に配置することでいい感じの４次元図形が作れそうです．詳しい定義は与えませんが，そのような４次元図形を**正多胞体**と呼び，全部で６種類あることが知られています．それぞれ使われる正多面体の個数に応じて，次

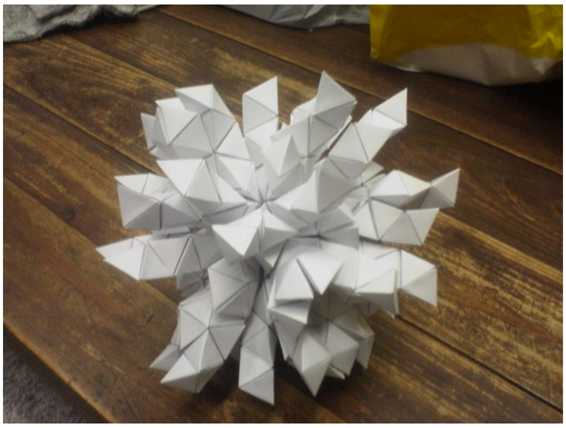
のような名前がつけられています．特に，正八胞体は４次元立方体のことです．

正五胞体（正四面体×５）　正八胞体（立方体×８）　正十六胞体（正四面体×16）
正二十四胞体（正八面体×24）　正百二十胞体（正十二面体×120）
正六百胞体（正四面体×600）

もちろん，正多胞体は４次元空間でないと構成不可能な図形なので，そのままの形では私たちの住む３次元空間に出現させることはできません．

正多胞体を３次元空間に出現させる方法の１つはその展開図を作ることです．たとえば，正八胞体の展開図はすでに示しました．さらに，四次元少女が作成した正百二十胞体と正六百胞体の展開図の写真も示しておきましょう．左の写真が正百二十胞体の展開図で，120 個の正十二面体が集まっています．右の写真は 600 個の正四面体が集まった正六百胞体の展開図です．

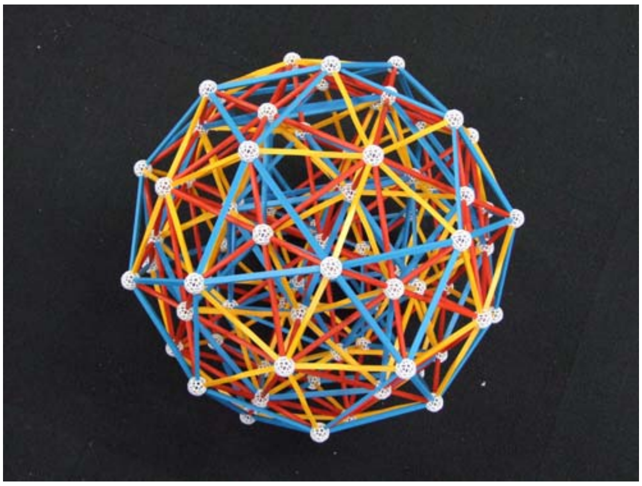




しかし，展開図のままでは正多胞体の全体像が思い浮かびませんね．そこで，正多胞体を展開せずに，そのまま投影することを考えます．正多胞体の頂点の座標を計算して，その第４座標を無視すれば，３次元空間内の図形が得られます．となれば，それを 3DCG で作図してパソコンの画面に表示するという方法が考えられます．実際，私の研究室にはそういう４次元図形を３次元空間に投影するソフトウェアの開発をしている人たちもいます．

そういうソフトウェアを使って正多胞体を観察すると，いろいろと不思議な現象に遭遇します．たとえば，平行投影ではなく１点透視図法のように投影して，正多胞体を４次元空間内で回転してみると，それぞれの胞（＝正多面体）が扁平したり，膨らんだり，今まで小さかった胞が巨大化したり，逆に大きかった部分が小さくなったり….

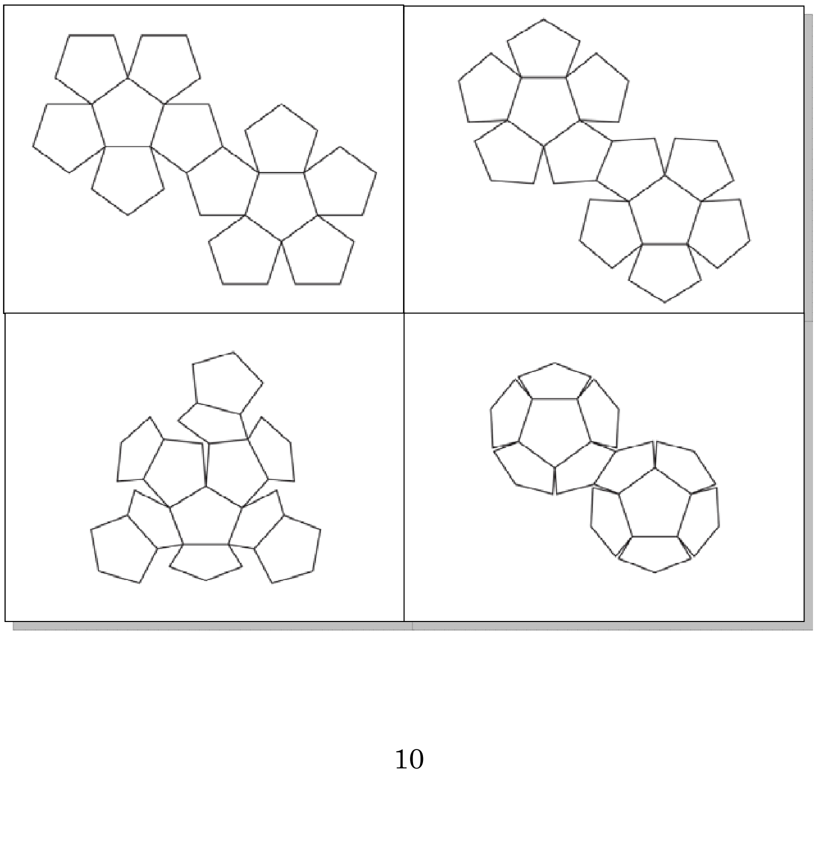
とはいえ，3DCG（＝３次元コンピュータグラフィックス）と言ったところで，所詮は２次元のディスプレーに電子的に表示されているだけなので，臨場感に欠けます．なので，コンピュータに頼らず，正多胞体を模型として作ってみたいなと昔から思っていました．たとえば，次頁上の写真は，３万円ほど投資して「ゾムツール」を購入し，作成した正六百胞体の骨組みです．よく見ると，中心部分にはきちんとした正四面体が詰まっているの

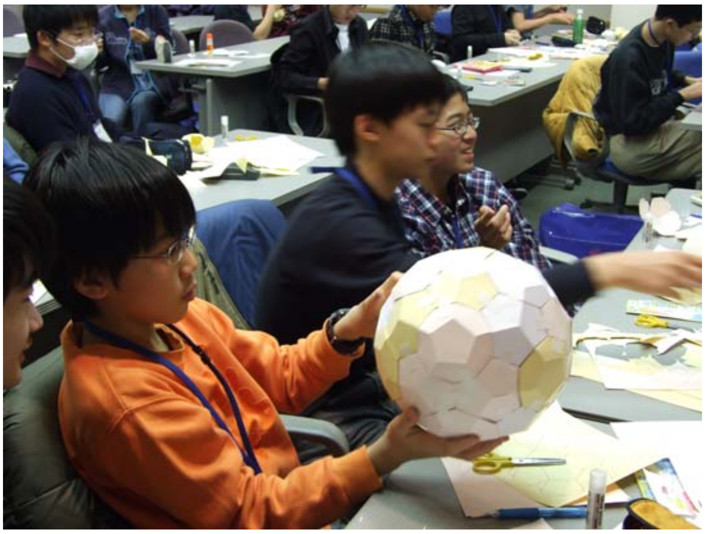


ですが，周囲にいくにつれて四面体は扁平して，いくつかはペッタンコになっています．たとえば，正二十面体の絵を描いたときのことを思い浮かべてください．中心部分の三角形はほぼ正三角形になっていますが，周辺部分の三角形は細くなっています．それと同じことで，４次元空間の中で天辺に位置している正四面体はほぼそのまま投影されますが，周辺にいくにつれて正四面体が傾いていき，扁平して投影されるのです．

この正六百胞体と同様に正百二十胞体も作ってみたいところですが，それを実行するにはさらに経費が掛かってしまいます．というのも，正六百胞体には頂点は 120 個しかありませんが，正百二十胞体には 600 個もあるからです．実際は，投影によって何個もの頂点が１つの重なってしまうので，そこまでの個数は必要ではありませんが….

そこで，展開図を作ったときのように紙で作ってみようと思ったわけですが，やはり正十二面体を大量に作らなければならないので，なかなかその気にはなれませんでした．しかし，このセミナーには 30 名近くの参加者がいます．それならば，人海戦術でなんとかなるかもしれない．というわけで，夕飯までの時間を正百二十胞体の作成に捧げることにしました．下図はその際に使った正十二面体の展開図です．左上は普通の正十二面体ですが，順に扁平したものになっています．これを大量に印刷して，分担して組み立てて，それを





集めて正百二十胞体を組み上げました．

本当は，色違いの正百二十胞体が３個できる予定でしたが，やはり時間が足りず，色を気にせずにでき上がった部品から次々に組み合わせていってしまったので，完成した正百二十胞体は３色が混ざったものになってしまいました．(左写真)

●19:30～　４次元アート＋映画『CUBE 2』鑑賞会

夕食後，それぞれに一休みした後で，初日最後のセッションが始まりました．夜ということもあり，あまり難しい話は避けて，４次元空間をモチーフにした絵画に関する話をしました．そもそも絵画は２次元的な表現ですが，いわゆる遠近法は３次元的に見える作品を作るための手法だと解釈できますね，だとすると，４次元的に見える作品を作る手法はあるのでしょうか.

たとえば，ピカソで代表されるキュービズムの絵画には「多視点的」といわれる作品があります．鼻の向きからすると横を向いているはずなのに，２つの目が正面を向いているといった作品です．つまり，いろいろな視点から見たものが同時に共存しているというわけです．これは４次元空間から見下ろすと，３次元空間の至るところが同時に見渡せているという事実に対応しているとも解釈できます.

また，未来派と呼ばれる人たちは，連続的な時間の流れを１つの絵の中に閉じ込めたような作品を描いています．たとえば，散歩している犬の足が「レレレのおじさん」のようになっていたり，バイオリンを奏でる人の手がたくさん描かれていたりします．つまり，未来派の作品は４次元時空間を絵としたものなので，このセミナーで扱っている４次元空間を表現したものになっていません.

個人的には，マックス・ウェーバーが描いた『四次元の内部』という作品がいちばん４次元を感じさせると思います．ダリの『超立方体的人体』という作品の中には４次元立方体の展開図を十字架に見立て，そこに磔になっている人が描かれていて，明らかに４次元空間が意識されています.

さらに，私の研究室の卒業生が作成した映像作品を２つ紹介しました．１つ目はエッシャーの『Waterfall』というだまし絵を 3DGC で実現したもので，お城の塔の上から滝のように落ちた水が水平な水路に沿って流れているのにいつの間にか塔の上にたどり着いてしまうという作品です．制作者の西村友子さんの言によると，エッシャーのだまし絵は２次元

と３次元の間で成立しているので，３次元と４次元の間で成立するだまし絵を作りたかったそうです．本来ならばカメラアングルを変えると水路の切れ目が見えてしまうところを，カメラの移動に伴ってお城が変形することでその切れ目が見えないようになっています．

２つ目は『Cubook』という作品で，４次元人の女の子が読む本の仕組みを紹介するというムービーです．４次元世界の本の各ページは３次元空間になっていて，その中に立体的なキャラクタが配置されています．女の子がそのキャラクタに触ろうとページの中に手を伸ばすのですが，触れるものの干渉できません．これは本の挿絵に触ったところで，その絵を移動したりできないことに対応しています．

最後は，『キューブ２』という映画を上映しました．それは４次元立方体の中に閉じ込められてしまった人たちのお話です．その前作である『キューブ』では，ルービックキューブのように細分された巨大な立方体に閉じ込められた人たちのお話で，数学的な要素が盛りだくさんでした．『キューブ２』の方は数学的な厳密性に欠け，後半はお化け屋敷をさまよっているような展開になってしまうのですが，４次元空間の不思議を体感させてくれる作品になっています．それほどできのよい映画ではありませんが，私の話に過度に刺激された脳みそを休める効果はあったでしょう．

その後は，各自部屋に戻って，自由に時間を過ごしました．とはいえ，自分たちが分担している課題を考えなければいけないので，寝る時間がなかったかもしれません．

湘南数学セミナー2 日目

●9:30～10:30　４次元空間でできること，できないこと

いよいよ自分たちが考えてきたことを発表する時間になりました．ビデオで記録することができなかったので，このセッションを詳しく再現することができないのですが，どのチームも驚くほどによい発表をしてくれました．さすがにパワーポイントを準備した人はいませんでしたが，ホワイトボードを使ったり，体を動かして表現したり，何かを作ってきたりと，いろいろな工夫をしてくれて，私が期待していた以上の盛り上がりました．中学生や高校生がこんなに積極的に発表をしてくれるなんて，驚きです．

⑪～⑯の真偽についてはあえて述べませんので，読者のみなさんも自分の頭で考えてみてください．

●10:40～11:40　４次元を超えて，宇宙の形を見る

いよいよ最後のセッションです．ここでは私たちが住んでいる宇宙の形について思いを馳せました．そもそも無限に広がっているかに思える宇宙に形などあるのでしょうか．たとえば，宇宙が丸い形をしているのだとすると，それはどんなものなのでしょうか．

手始めに，地球の形について考えてみましょう．現代に生きる私たちにとって，地球が丸いことは常識です．だからといって，普段は地球の丸さを意識して生きているわけでは

ありません．地球が十分に大きいおかげで，日常的な生活圏を平面だと思っていたからといってなんの不都合はありません．その一方で，その平面を無限に広いものだと思ってはいけないことも理解しています．端に行けば行くほど落ち込んでいき，湾曲して閉じて球面になっていることも知っています．

それと同じことがこの宇宙についても言えるのではないでしょうか．つまり，地球を離れて宇宙をどんどん進んでいくと，宇宙が落ち込んでいき，閉じて丸くなるという可能性があるのではないか．もちろん，本物の宇宙が閉じて丸くなっているかどうかは数学者である私には断言できない．しかし，「もしそうだとすると」と考えましょう．だとすると，宇宙が落ち込んでいく方向とは３次元空間からはみ出ていく方向です．すなわち，それこそが４次元の方向に他ならない．そして，閉じて丸くなった状態こそがすでに目撃した３次元球面＝４次元空間に浮かぶ丸い宇宙なのです．

これで丸い宇宙が何なのかがわかりました．そういう宇宙の中を地球を離れてまっすぐに進んでいくと，どうなるでしょうか．きっと宇宙が丸いおかげで進路は少しずつ曲げられ，大きな円周を描いて地球に戻ってくることになるでしょう．地球が丸いおかげで大航海時代のマジェランたちが地球を一周できたように．

では逆に，どの方向に進んでも出発点に戻ってこられるとしたら，地球は丸いと結論してよいのでしょうか．たとえば，地球がトーラス（＝ドーナツ）のような形をしていたとすると，やはりどの方向に進んでも出発点に戻ってこられます．しかし，真ん丸い地球とトーラス（「地トーラス」と言うべきですね）とでは明らかに形が違います．もちろん，その違いは穴が開いているか否かですが，その穴の存在は地トーラスにへばりついて生きている生命体には理解不可能でしょうね．私たちは神様的な視点から地トーラス全体を眺めることができるので，その穴の存在を見てとれるのです．

そこをなんとかしたい．地トーラスにへばりついている生命体がその穴の存在を確信するにはどうしたらよいか．そこで，地トーラスを１周しながら，その経路にロープをはわせてみることにします．そして，出発点に戻ってきたところで，そのロープの両端を持って引っ張ってみるます．すると，ロープは多少手元に手繰り寄せられるでしょうが，ある程度引っ張ると，それ以上手繰り寄せられない状態に陥ります．あくまでロープは地トーラスの表面から離れることはないとするならば，そのロープはまさに地トーラスの穴に引っかかっているのです．反対に，地球（＝球面）の場合には，地球を１周したロープはどこにも引っかかることなく，手元の回収可能です．

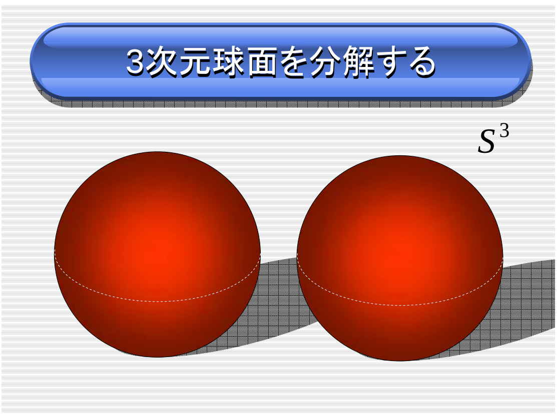
これと同じことを宇宙について考えるとどうなるでしょうか．仮に，トーラスのようにその中にいたのでは気づくことのない穴が開いていたとしたら…．宇宙船にロープを結び付けて宇宙を 1 周して地球に帰還．宇宙に漂うロープの輪を回収しようとしても，何かに引っかかってしまったとしたら，宇宙には中からではわからない穴が開いている．宇宙を飛び出して神様的な視点で宇宙全体を見渡せるのならば，その穴の存在を確認できるのだろうけれど…．

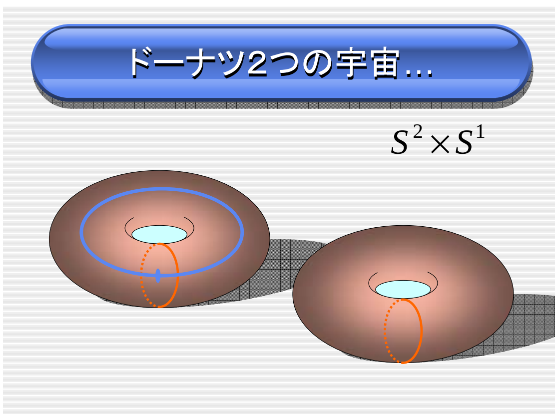
では，逆にどこにもロープが引っかかることなく回収できたのなら，宇宙は真ん丸いと言ってよいでしょうか．２次元宇宙の場合には，そう結論してもよいことは昔からわかっていました．しかし，３次元宇宙の場合も同じことが言えるのかどうかは長い間懸案のままでした．そして，近年，その謎がペレルマンというロシアの数学者によって解決されたのです．すごく比喩的に表現するならば，ペレルマンが解決した「ポアンカレ予想」とは次のような命題です．

ポアンカレ予想　穴の開いていない宇宙は３次元球面になっているだろう．

この予想は，20 世紀初頭にポアンカレが提唱して以後，約 100 年間，未解決の難問として数学者の挑戦をはね除けてきました．その難問を解決したペレルマンはフィールズ賞を授与されたのですが，その受賞を拒否して自宅に引きこもってしまいました．そうした数学者の人間模様を描いた番組が昨年の 10 月に「NHK スペシャル」として放送されたのですが，ご覧になったでしょうか．海外のテレビ局が制作したような雰囲気をかもし出していましたが，実際は，日本の NHK の人たちが多くの数学者にインタビューをして作り上げたものなのです．ちなみに，私はその番組の監修をさせてもらいました．

ポアンカレ予想の解決によって，穴の開いていない宇宙は３次元球面であることがわかりました．では，穴の開いている宇宙とはどういうものなのでしょうか．たとえば，２つの球体の表面を貼り合わせると３次元球面になりましたが，２つのドーナツの表面を貼り合わせたら，どんな空間ができあがるのでしょうか．それは球面が１つの円周に沿って連続的に並んでいる空間で，その円周に沿ってロープをはわせると回収不可能になります．つまり，穴が開いている宇宙の一例なのでした．





この他にもいろいろな穴の開いた宇宙の例が構成できますが，詳しくは拙著

『トポロジカル宇宙[完全版]―ポアンカレ予想解決への道』（日本評論社）

を読んでください．こう話をまとめたものの，中高生に本の営業をするのもなんなので，最後に私が書いた本の争奪じゃんけん大会で盛り上がって，セミナーの幕を閉じました．

現代数学市民講座「計算しない数学」

２日目の 14：00 からは一般の市民を対象とした講演です.「セミナー」では自分の頭で考える時間を確保しながら進めていきましたが，今度はノンストップ爆走トークで聴衆を魅了していきました.

私の「生也」という名前の由来に始まって，位相幾何学的グラフ理論の分野では世界ランキング３位であること,「基礎数学力」をキーワードにした数学教育の構想し，本邦初の数学小説『第三の理』を著し,「数学探偵セイヤ」として活躍していたことなど，大げさな自己紹介をした後で，速算術的な話題を２，３紹介しました．たとえば，連続した 10 個の数の合計は５番目の数の後ろに５を追加するだけで求められることや，左右の手で数えた２数の掛け算の答えが立っている指の数と左右の折っている指の本数を掛けた数を並べるだけで求められることを示して，なぜそうなるかを解説しました.

しかし，世の中の人たちはこういう計算がらみの話ばかりに興味を示して,「計算しない数学」に目を向けないことを嘆きながら，人間に本来備わっている数理的な能力（＝基礎数学力）を活用し，それを自然に延長するような数学教育にしなければいけないと訴えました．1901 年にイギリスの数学者であるペリーが提唱して以来，20 世紀の数学教育は微積分を頂点とする計算中心の数学へと発展していきました．計算中心の数学は私の趣味には合いませんが，その後 100 年の教育を支配してしまった提言をしたペリーの偉大さには敬服します．そこで，私も 21 世紀の数学教育のあり様を規定する提言をすることに.

① 数学を二分しよう.「自由に考える」と「お作法に従う」を区別しよう.
② 離散数学的な題材を活用して「言葉で論証する」を実践しよう.
③ コンピュータの利用を前提に，参加できる数学の世界を広げよう.

この提言に説得力を与える離散数学的な題材や私が開発したグラフ理論学習支援ソフトウェア「gm standard」を利用した動的な問題解決の例示を紹介した後で，現状で私の提言を実践すると，優等生が無力化し，劣等生が活気づいて，授業で下克上が起こることを話し，計算中心の数学の指導がいかに虚しい優等生を量産しているかを指摘しました．高校の先生たちをそういう指導に駆り立てているのはやはり教科分断的で知識偏重な大学受験.実は，それと対峙する形で，近年は総合問題入試を実施する大学が増えています.

私が担当しているマルチメディア文化課程もその先駆け的な存在で，かなり個性的な問題を出題しています．それは，記憶に頼らず，その場で考えれば解答できる問題です．たとえば，レオナルド・ダ・ヴィンチの「最後の晩餐」を見て，何がわかるかと問う．暗記してきたことを解答用紙に書くのではなくて，その絵を見て自分で気づいたことを解答する．キリストも含め 13 人の人が描かれているので，その中には誕生月が同じ人がいるはずなのですが，それを指摘してくれる受験生がいたら最高ですね.

いずれにせよ，お決まりのお作法に従って解答をするのではなく，自分が思ったことを

きちんと言える人を期待した入試なので，マルチメディア文化課程に入学してくる学生も個性派ぞろい．そういう学生と私という「数学者」が交わることで，いろいろとおもしろいことを実現しています．数学的な原理に基づいて不思議な CG を作成したり，私が書いた数学小説を映画化したり，４次元多胞体の模型をつくりまくったり….

そして最後に究極の選択です．あなたのお子さんを知識に基づいて正解を言える子にしたいのか，知識はなくても自分で考えたことを言える子にしたいのか．子どもは仕込んでしまえば何だってできるようになります．そこをぐっとこらえて，自ら解法を見つけ出していくような子どもに育てるにはどうしらよいのか．私の子育て論をちょっぴり披露した後で，拙著『計算しない数学』（青春出版社）と前述の『トポロジカル宇宙』を宣伝して，講演を終了しました．

この講演の参加者は年配の方が多かったのですが，おばちゃんたちの反応がよかったので，こちらも非常にやりやすかった．講演終了後には，宣伝した拙著の販売とサイン会を行ったのですが，期待以上の売れ行きでした．ある女性の求めに応じて握手をしてあげたら，それ以後たくさんのおばちゃんたちから握手を求められてしまいました….

さて，このような内容のセミナーや講演をみなさんはどう思うでしょうか．数学者からしてみれば，稚拙な内容だと思われるかもしれませんね．もちろん，私だって，数学者を相手にこのような話をしようとは思いません．しかし，中高生や一般の方を対象に，専門的な内容を数学者相手に話すときと同じやり方で話しても仕方がないと思います．

確かに中高生といえども，学校数学の枠を越えて数学を愛好している子たちも少なくないでしょう．実際，今回のセミナーに参加した高校生の中に徹夜で微積分からフーリエ解析まで自主ゼミをしましたという子たちがいました．そういう子たちに対しては，数学者流のスタイルを見せてあげるというのは効果的でしょう．しかし，始めから数学が得意な子たちだけを相手にしていたのでは，数学を愛好してくれる人たちの裾野は広がりません．

ジリ貧になりかけていた湘南数学セミナーでしたが，「４次元空間」をテーマにすることで，学校の数学は苦手なのに数学はおもしろいと思っている人たちがたくさんセミナーに参加してくれました．次回以降もそういう中高生が興味を持つようなテーマで参加者を募集して，セミナーが続けられていくことを期待しています．リフレッシュ！