

書 評
ロジカル・ディレンマ
ゲーデルの生涯と不完全性定理
ジョン・W. ドーソン Jr 著, 村上祐子・塩谷 賢 訳
新曜社

桔梗 宏孝 (神戸大学工学研究科)

本書は John W. Dawson, Jr. による “Logical Dilemmas, The Life and Work of Kurt Gödel,” A K Peters, 1997 の邦訳で、2006 年に出版された。Gödel は 20 世紀の最も優れた論理学者の一人であるが、本書はおそらく Gödel に関する初めての本格的な伝記と思われる。Gödel の不完全性定理がきっかけで論理学を専門にした人は結構いると思われる。評者も高校生のとき(ちょうど Gödel の亡くなった 1978 年頃)に E. Nagel, J. Newman の “Gödel’s Proof”(本書 p. 291 に紹介あり)の邦訳を読んで感動して論理学に興味を持った(ただし、現在は「不完全性現象」と関係ない研究を主にしている)。

本書の主題である Gödel の個人史や思想はもちろん大変興味深いですが、Gödel がいた 1925 年ごろのウィーン大学の様子、プリンストン大学の高等研究所の設立以来の様子、そして様々な人物との交流が書かれており、読み物としてとても面白いと思った。評者はあまり知らなかったのであるが、Gödel はメンタルヘルスの問題をかかえていた。そのような健康面の問題もかなり詳しく書かれているが、淡々といやみがなく書かれていると思われる。John Nash の伝記である “A Beautiful Mind” (Sylvia Nasar 著) と似た印象である(映画の印象とはまったく違う)。“A Beautiful Mind” もメンタルヘルスの問題を扱っており、また、プリンストンが主な舞台になっている。

はずかしいことに、評者は 2007 年に本書を読むまで、“Logical Dilemmas” のことを知らなかった。原著は 1997 年に出版されたが、1998 年に “A Beautiful Mind” が出版されている。こちらは出版当時、複数の方から面白いという話を聞いて知っていた。

さて、本書は全般にこなれた日本語になっていて、読みやすい。結構厚い本なので、誤訳が数カ所あるのは仕方がないことである。すぐわかる誤訳が数箇所あるが、ほとんどは文脈から修正できる。ただし、degree と rank の訳をそれぞれ「度」と「階」に統一しているのには疑問を感じた(内容には全然影響ないが)。

以下、印象に残ったことの一部とそれに関連することを少し述べる。

第 3 章で 1928 年までの論理学の発展の概観が述べられており、とても参考になる。ヒルベルトの問題も解説してあり、第 1 問題(連続体仮説)と第 2

問題(自然数論の無矛盾性)が Gödel の仕事の動機の一部と考えられる。学位論文の完全性定理に続き不完全性定理を証明したことが第4章で、集合論の選択公理や連続体仮説の ZF(Zermelo-Fraenkel の集合論公理) に対する相対的無矛盾性を証明したことが第6章で、宇宙論のモデルの仕事が第8章で説明されている。

完全性定理と不完全性定理は互いに矛盾する響きがあるが、完全性の意味が異なる。これを説明しておこう。任意の構造で成り立つ一階の命題は、よく使われている推論規則と論理的な公理だけで証明できるというのが完全性定理である。たとえば、任意の群で正しい一階の命題は、よく使われている推論規則だけを使って群の公理から証明できることがこれからわかる。一方、命題の集合 T が完全 (complete) であるとは、任意の命題 φ に対し、 T から φ あるいはその否定が形式的推論により導けるということである。Gödel のドイツ語の論文では、「決定可能」に近い意味の言葉が使われていたそうであるが、英語ではどちらの概念も complete と呼ばれるようになってしまった。因みに、complete は「完備」と訳されることが多いが、論理学では「完全」と訳される。

不完全性定理には計算可能性の概念が不可欠である。現在ではコンピュータとかアルゴリズムの概念が身近になり、この辺のことがわりと簡単に理解できるのであるが、当時はなかなか不完全性定理は理解されなかったようである。そのため、Gödel も少なからず攻撃を受けたようだ。不完全性定理はだいたい次のような定理である。

(第1 不完全性定理) T を公理系とし、自然数の和と積の基本的な性質や数学的帰納法を含むとする。 T から矛盾する命題が導けないとき、 T の要素を生成するアルゴリズムがあるならば T は不完全である。すなわち、ある命題 φ に対し、 T から φ もその否定も形式的な推論で導くことはできない。

(第2 不完全性定理) 上と同じ仮定のもとで、「 T から $1 = 0$ が導けない」を意味するある論理式は T から導けない。

本書の92頁から93頁にかけて第1 不完全性定理と第2 不完全性定理の違いが説明してあるが、肝心なところに誤訳(各自で直せると思う)があるので注意してほしい。また、無矛盾性の表し方によってはその理論の中で証明できるようになるという Kreisel の注意のことが96頁の脚注に書いてあるが、原文と少し違う気がする。

Gödel が初めて不完全性定理を発表した会議においては、von Neumann しかその重要性を理解できなかった。このあと von Neumann は「 T から $1 = 0$ が導けない」ということが T で証明できないことを独自に示したらしいが、

Gödel がすでに投稿していることを知り、くやしがつたらしい。また、Post が不完全性定理を 1921 年に得ていたという話が第 6 章に出てくる。Post の停止性問題などは不完全性定理と似た話だと思っていたので「やっぱり」と思ったが、Post の停止性問題を解くアルゴリズムがないことを示したのは Turing で、Post が 1921 年にやったのはこれとは関係ないようである。因みに、不完全性定理の仮定を満たす公理系に対する決定不能命題として、Kolmogorov 複雑性の意味で乱数であること、停止しないプログラムの非停止性などがわりと簡単に得られる。

第 5 章以降ではプリンストン大学の高等研究所 (IAS) に徐々に舞台が移っていく。Gödel は発表がうまかったようで、IAS の創設の準備をしていた Veblen がある研究集会で Gödel の講演に感銘を受けたことが、Gödel が IAS に招かれるきっかけになった。しかし、Gödel はウィーンにも未練があつてぐずぐずしていたため、アメリカに移住するときは大西洋航路を利用できず、シベリアから日本 (横浜) を経由して太平洋航路でアメリカに行くはめになった。このとき、横浜にしばらく滞在していたようだ。

プリンストンで最初に会った人たちの中に経済学者の Morgenstern がいる。Morgenstern はウィーンから亡命してきた人で、Gödel と面識があつたが、親しくなつたのはアメリカに来てからだ。このときに Gödel が少々気が違つているということに彼は気がつた。しかし、生涯、Gödel のよい友人だつた。他に Gödel と仲がよかつたのは Einstein と von Neumann である。因みに、“A Beautiful Mind” によると、Morgenstern はすでにメンタルな問題をかかえていた Nash に IAS のポジションを与えようとしている。consultant という職を用意できたが、2ヶ月の試用期間後に首になった。奇行のせいで IAS の事務の人たちが彼を怖がつたようだ。

Gödel は von Neumann らの努力で IAS で終身雇用されたが、Veblen や Weyl の反対で、なかなか教授に昇格させてもらえなかつた。運営に関わる教授の仕事をきちんとやれないのではという懸念があつたからのようである。しかし、教授になってからは雑用もこなしていたようである。事務の人にも、ときどきかかつて来る長電話を我慢すれば使える人と思われていたらしい。因みに、Nash も電話魔だつたようだ。

Gödel は選択公理や連続体仮説の独立性も研究していたが、できているのに隠しているといううわさもあつた。連続体仮説の独立性は 1963 年に Paul Cohen によって証明された。しかし、Cohen の証明では本質的でないところにギャップが見つかり、Cohen はそのために認められなくなるのではとあせつたが、Gödel が励まし、出版をアシストした。ただ、Gödel は細かいことに口を出し、Cohen もうんざりすることがあつたようだ。Cohen の証明のアイデアは本書に簡潔に書かれている。因みに、“A Beautiful Mind” にも Cohen は登場する。Nash は他人とのつきあいがほとんどなかつたが、Cohen は Nash

と交流があり，二人の関係について妙なうわさもあったそうだ。

本書も“A Beautiful Mind”も面白いのだが，楽しくない部分も多い．本書にも登場する Tarski の伝記ならもっと楽しいのではないかという話をしていたら，2004 年に出版されていることを人に教わった (A. Feferman, S. Feferman 著, Cambridge)．Tarski は Gödel ほど一般には有名でないが，論理学者の中では大物で，多くの弟子を輩出している．Tarski は “sane logician” の中では自分が一番だと知人に述べていたそうだ．本書にはもちろん論理学者が大勢登場するが，“A Beautiful Mind”にも結構，論理学者が登場する．本書と併せて，“A Beautiful Mind”や Tarski の伝記，Turing の伝記 (A. Hodges 著．評者は読んでないが，本書で紹介されている) を読まれると面白いと思う．“A Beautiful Mind”には日本語訳もある．Turing の伝記は舞台化されていて (H. Whitemore, “Breaking the Code”)，劇団四季でもやったことがあるらしい．