

## 書 評

### 木村弘信著『超幾何関数入門』

原岡喜重（熊本大学大学院自然科学研究科）

超幾何関数はよく知られた特殊関数である。ルジャンドル多項式などの直交多項式（球関数）を与えるということもあってか、特殊関数として非常に詳しく調べられていて、多くの公式が知られている。また楕円モジュラー関数などの保型関数とも関わり、オイラー、ガウスをはじめ多くの数学者による深い研究がある。

特殊関数は特殊であるところにその本質がある、という見方もあるが、一方数学には何事も一般化・抽象化しようという傾向があり、特殊関数に対してもその一般化がいろいろと考えられてきた。そこには役に立つ特殊関数をもっと手に入れたいという事情もあったであろうし、またいろいろなことがうまくいっている仕組みを追求したいという欲求もあった。超幾何関数に対するそのような試みも膨大にあり、今でも続けられている。それらの中で、1980年代に始まったI. M. ゲルファントらによる一連の研究は、特殊関数の世界だけでなく多方面に大きな影響を与えた。調べてみると、彼らは超幾何関数に関して実にいろいろなことをしているのだが、その中で大きな仕事としてはGrassmann多様体上の超幾何関数と、GKZ超幾何関数の2つがある。前者はオイラー型の積分表示に基づくもの、後者はベキ級数展開に基づくものである。前者は積分を通して合流型の超幾何関数とも相性が良く、一方後者はトーリック多様体と結びついて、代数幾何や組合せ論などの方面に広がっていった。ただし後者はもともとベキ級数からスタートしているため、不確定特異点との相性があまり良くなくて、合流型超幾何関数を考えるときには前者の方が優っているようである。

さて本書のメインテーマは、前者すなわち（合流型を含む）Grassmann多様体上の超幾何関数である。本書の構成としては、まず初等関数から始まって、解析学で学ぶ様々な事柄、とくに積分表示に関する事柄が詳しく解説される。これに第1章、第2章が宛てられる。第3章では、超幾何関数やその合流型が登場し、それらについての隣接関係式などが示される。隣接関係式とは、関数に含まれるパラメーターの値を整数分ずらした関数ともとの関数との関係を表す式で、特殊関数としての基本的な公式の一種である。そして第4章でゲルファント流の超幾何関数論が登場する。どのような見方で超幾何関数をとらえ、その一般化が考えられたのか、丁寧な解説となっている。第5章は対称性で、対称性とは、(今度はパラメーターではなく)独立変数の方にある変換を施した関数ともとの関数との関係を表す公式を指す。超幾何関数

においては「クンマーの 24 個の解」とよばれるもので、これを Grassmann 多様体上の超幾何関数に対しても与えるという内容になっている。最後の第 6 章は隣接関係式である。これも Grassmann 多様体上の超幾何関数に対して与えている。

本書の特色を述べるために、少しゲルファント流の超幾何関数に触れなくてはならない。超幾何関数は、

$$(1) \quad \int_{\Delta} u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b} du$$

という形の積分で表される。ここで  $a, b, c$  はパラメーター、 $x$  が独立変数で、 $\Delta$  は適当な積分路（サイクル）を表す。この積分をいじることで、隣接関係式・対称性をはじめ、モノドロミー・接続係数にいたる豊富な情報（公式）が手に入れられる。これを一般化しようと思うと、たとえば

$$(2) \quad \int_{\Delta} \prod_{j=1}^n \ell_j^{a_j} du_1 du_2 \dots du_k, \quad \ell_j = x_{j0} + x_{j1}u_1 + x_{j2}u_2 + \dots + x_{jk}u_k$$

というようなものが考えられるだろう。これはすなわち、(1) を積分変数  $u$  の 1 次式のベキ積の積分と見て、積分変数（1 次式の変数）を  $k$  個に増やし、1 次式の個数も  $n$  個に増やしたものである。青本和彦氏は (2) の形の積分に対する研究を行い、大きな理論体系を作り上げた。そうするとあとは個別のケースについての研究になっていくのかな、と思われていたところ、ゲルファントは (1) に対する新しい見方を提示し、別の領域を切り拓いていったのである。その見方とは、少し簡略化していえば次のようなものである。

(1) の積分の中に現れる

$$u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}$$

を、

$$\chi(z_1, z_2, z_3) = z_1^{a-1} z_2^{c-a-1} z_3^{-b}$$

の  $z_1, z_2, z_3$  のところに  $u$  の 1 次式を代入したものと考える。ここで  $\chi(z_1, z_2, z_3)$  は、群  $(\mathbf{C}^\times)^3$  の指標と思うのである。（正確には  $(\mathbf{C}^\times)^3$  の普遍被覆群の指標となる。）関数に 1 次式を代入して積分する、というのはラドン変換であるから、つまり (1) の積分は群  $(\mathbf{C}^\times)^3$  の指標のラドン変換と見ることができる。

ここで群を持ちだした効果は大きい。まず群を取り替えたらどうなるか、という考察が可能になる。 $(\mathbf{C}^\times)^3$  ではなく  $(\mathbf{C}^\times)^n$  とすれば、(2) の積分が得られるであろう。さらに、乗法群に限らず、加法群も混ぜてみると、たとえば  $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}^\times)^2$  の指標は

$$e^{az_1} z_2^b z_3^c$$

であるので、これのラドン変換はクンマーの合流型超幾何関数となる。クンマーの合流型超幾何関数やエアリー関数の積分表示には指数関数が現れるが、それらは加法群の指標として統一的にとらえることができるのである。(2)という一般化について、さらに指数関数を混ぜたものを考えるという研究もいろいろなされているが、ゲルファントの見方はどのような形で指数関数を混ぜるかについて一つの自然な方法を与えることになる。さらに背景に群があると考えることで、隣接関係式や対称性といったいろいろな公式の群論的解釈が可能になる。すると公式のとりとめのない集合体とも思われかねない特殊関数の世界に、全体を貫く統一的な構造が浮かび上がってくるのである。

以上からわかるように、この話では、ものをどう見るか、というのが第一の勝負所である。第二の勝負所は、その見方を発展させ、発展させた内容を具体化していくところにある。そして本書では、隅々までこの態度が貫かれている。本体の第4, 5, 6章はもちろんのこと、その導入となる第3章でも、さらに初等関数や解析学の準備をしている第1, 2章でも、ものをどうとらえるか、そのとらえ方によるとそれをどのように扱えばよいか、ということが実にしっかりと書かれている。したがって数学の基礎的な教育(どの範囲かというのは難しいが)を受けた人なら、ほぼ確実に内容をたどることができて、しかも自分で計算しようとしたときに何をすればよいかということもわかると思う。

なお本書では、上で説明したような一般合流型超幾何関数のうち、積分変数が1個の積分で与えられるもののみが扱われている。それでも十分豊かな内容となっているが、多重積分で与えられる一般合流型超幾何関数はもっと面白いはずである。とくに多重積分におけるサイクルの研究などは、不確定特異点の理論や超平面配置の幾何学などに新しい境地をもたらすのではないかと評者は考えている。そのほかにもいろいろ発展の方向は残されており、そういった研究へ向けて、本書は手堅い基盤を与えていると思う。