

# 数の夢のひよこたち

難波 完爾

以下のものは、

平成 18 年度

女子高校生夏の学校

～科学・技術者のたまごたちへ～

期日：平成 18 年 8 月 17 日(木)～平成 18 年 8 月 19 日(土)

主催：文部科学省，独立行政法人国立女性教育会館，男女共同参画学協会連絡会，  
日本学術会議「科学と社会委員会 科学力増進分科会」

での、

3. 講演「科学・技術の楽しさ II」

3- 「数の夢のひよこたち」

8 月 18 日(金)9:00~10:30 大会議室

の冊子に書いたものです。

この講演は、私の話と、

天野玲子(鹿島建設(株)・東京大学客員教授)

「山の神は本当に怒るの?」

内田美佐子(石川島播磨重工業(株)基盤技術研究所主任研究員)

「無重力の楽しさと宇宙実験の難しさ」

の 3 人が、この順序で、30 分づつ話して、その後で、ディスカッションがありましたが、その報告です。3 人の話は、テーマは個別のですが、自然法則と人の認識という点では一つに結ばれていたと思います。

ディスカッションのなかで、数学に関係したことで質問があったのですが、その二つとも本質をついたものです。これは、私が、質問や討論をこの様に受け取ったという意味で書きますので、別の人は質問の真意は異なると思うことも多いと思います：

a) 広い意味の、数の世界で、ハミルトンの四元数やケーリーの八元数は、現実に存在するのですか。

b) 数学を“何で”勉強するのですか。

この二つの問は、自分が、正に問いたいことであつたので印象的でした。だから、当然のことですが、答は知りません。が...

a) の返答として、私は「自然」法則は、反抗期は過ぎていていると感じておりますから、  
“綺麗なお姉さんは好きですか”

ではありませんが...、べつに...敢えて、臍曲がりに、

“綺麗な「数の小箱」は嫌いです”

などとは云わないと思います。...と、言葉は違ったかも知れませんが、そう言う意味のことをしゃべりました。

現実に、古代から現代に至るまでの、生物、物理、科学、哲学などの教えるところは、

できあがった作品を見ますと...調和というか、次の調和の入り口があることを示唆しているように思えます。

例を  $x^n$  の微分  $nx^{n-1}$  に取ってみましょう。すると、自然に、 $x^n$  は何かの微分になるの？、という問がでます。 $x^{n+1}/(n+1)$  ですよ答は...、という所で、...まあね？と...普通は詰まる訳です。現在では、対数  $\log$  など、疑問を持つ前に教えられていますから“何でもない”かも知れませんが...これは重いことなのです。

仮に、何もないとこから、 $\log(= \text{logos} + \text{arithmos})$  という概念を貴方は“赤ちゃんから青年期”までに作れますか。と...自問してみると、私の場合はハッキリと(この場合は確信をもって)「不可能です」と答えられる。つまり、 $x^{n+1}/(n+1)$  の世界です。今までの、外の世界は、法則の“ない”世界ではないのです。...別な、場合によっては、もとの世界よりも「美しい」法則の“ある”世界が...、もう、すでに存在していた...んだ。

と...そこに立てば思えるのです。いや...この(新しく認識された)世界のなかのほんの一部が、昔の自分の“すべて”であったと思えるのです。

ゲーデルの定理のなかに、不完全性定理(incompleteness theorem)というのがありますが、正にこのことを述べたものです。何か、明確な形で法則化された体系には、必ずその体系で“律する”ことのできない世界があると述べています。

当然のことですが、勿論、自分は...その立場にいませんが...、先日、国立博物館での「書の至宝展」などでみた、聖徳太子の筆という、譬喩品第三(辟の字の口の部分が言となる字であるが対応する字がないのでこの字で代用した)なかで、(太子は)我々中根人は、と云っていますが、...まして、私などは、更なり...でございます。

大切なことは、私のような凡人でも、 $\log$  の場合のように、そこに...暫く立てば、薄々とは解る世界があろうというものです。

自然法則は“別に先を急ぐ”必要もありませんから、のんびりすごしているわけです。若い人たちも急いで「長丁場」の人生で早く“息をきらす”ことはないと思います。300年かかる仕事は300年かかります。この300年は5000年などという文化の時間では長いほうには“とても”入れてもらえないでしょう。

兎も角、大きな“もの”があることを考えて欲しいのです。そうすれば、普通に“効率”などと云っている概念が、なかなか正体の解らない概念であることの...入り口あたりに立てるでしょう。解らないことを、「解らない」と云う、あるいは“思う”ことこそ一番大切です。その意味で、この二つの素直な質問をした二人の人には敬意を表します。

b)の返答としては、私は、...それは品でしょう、...と答えました。品格とは...何故か答え(られ)ませんでした。

講演のなかでも話したのですが、紐の話で、縄文式の土器などに関係しますが、例えば、「ひょっとこ」(火男)や「おかめ」(お甕)など(異論で(も、が)あることは承知しています...)ですが、彼・彼女の仕事の一番大切なことは、男は湯瓶の下に火種を絶やさないと、女は甕の水に、百足などの異物が入らないようにすることです。この保証、つまり質(しち)です。水甕の現代版は、水源池やペットボトルでしょうが...これに虫など異物が入っていたら、騒ぎたてる連中は黙ってはいません。つまり、必要なことを書き、必要でないことを書かない。それが、品だ。...と、書きながら、私は条件を満たしていないな...と思うが...まだ、反省はしていないようだ。

兎も角，瓶と紐は関係あります．エジプト古代のアンフォラ(ギリシャ時代の呼び名)などは，紐で結ばれた形でヒエログリフなどにそれを表していますし，現代でも蛸壺などは紐がなければ話にもなりません．月の砂漠でも水は命綱です．駱駝の商隊の絵にしても鞍にこれが(結ばれて)ないと絵になりません．

水に関しては，水引というの也有ります．紙縫(こより)は，恐らくは，農業の水引きの順番などの籤の名残でしょうが，これを結んだ結(ゆい)の名残でしょう．つまり，公平性の承認の標(しるし)でしょう．この精神的な“しるし”が品なのではないでしょうか．

そこで，今の，何故，数学なの...？，ですが，つまり，これは言葉の“水”だと思ふのです．塩や砂糖を“とかして”いないものです．色とか音，直線とか個数...など，そういう元になる“事の葉”といいますか，そういうものはあつた方がよいと思ふます．

普通，ものは使えば少なくなつたりしますが，言葉はどんどん増えるのが普通です．尤も，言葉を“なくす”などという言葉もありますから，増えるとは限らないわけですが...．ことばも共有と協調のシンボルでしょう．だから，不蒙語などの言葉もあるのでしょうか．

江戸の小路のとうふ屋の，天秤へこへこ，水はチャピチャピ，

揺れても豆腐はくずれない．揺れているからくずれない．

つまり，状況が変わつても，不変なものは，ことば(= 数学など)，...ではないでしょうか．

心とものをみたく風，心とものと揺れる鈴

品は三つの四角形，三つのものの宿る窓

といったところでしょうか．宿は...百人の家というのも当然ですが新鮮です．百人のうちの相当数は“ことば”かも知れません．“心”も泊まっていた欲しいところです．

以下は原稿の本文です．

## 数の夢のひよこたち

先ず，数の概念のはじまりの頃について考えてみましょう．「数」という字はその頃ことを記憶している第一の証人でしょう．この字の構成は

数 = 婁(数珠つなぎ = 母 + 中 + 女) + 支(女とも書く，ぼくつくり = ト + 又)

のようです．数の概念が形をともなつて，現在に残っている代表的な「もの」は数珠やロザリオ(rosário)でしょうか．これは，多くの文明のなかで共通に紐を通した珠の環の形を保っているのです．

これらの概念を貫く，紐や糸や縄の概念も大切なものです．我が国でも文字が入つてきた頃の代表的な人物といへば，例えば，霊異記や三宝絵(中)などでも，最初の三人，聖徳太子，役行者，行基菩薩...と，まあ定番でしょうけれども，このような人々が登場してきます．暦や工，匠などの技として文字以前の「技，業」の形でも継承されてきているのです．現在でも，聖徳太子は大工や，工，匠(たくみ)の神様として祀られていることは四天王寺などに行つてみれば，曲尺を持った太子の像として見るすることができます．

また，東大寺の大仏開眼の筆に結ばれていた纏(る)も御物として残っているそうです．

俗に，六法(りくほう)といへば，矩(く，差し金 = 指矩 = 曲尺)，権(重り = 錘 = 分銅)，衡(はかり = 天秤)，準(水盛り = 水尺 = みずばかり = 水準器)，繩(墨糸 = 墨縄 = 標(しめ，目印)のついた縄)ですが，これらに関する素養は人が人であるために必要なものでしょう．

孟子の離婁にもあります。

今から二千数百年も前の頃、ユークリッド(Euclid)、孔子、釈迦などの人々が群出しています。恐らく、止めのない狩り、戦乱や耕作などの破壊の後に、一筋の道を見いだした人たちの集団でしょう。それを、如何に...時を貫く紐に、託すかを考えたのではないのでしょうか。

中南米にはマヤとかアステカの文明がありました...その文字は、マヤグリフ(Maya-glyph)などといいますが、多くのパーツの組合せで、漢字とその精神が非常に近いのです。おそらくは遠い昔、共通の精神をもっていた集団があったのでしょう。時間が環の構造をもっているのも似ています。貝殻の記号がその始点と云われています。民族が海を渡ってきたことの記憶かもしれません。

時という字のことを考えてみましょう。これは、勿論、日と土と寸から成っております。日は太陽ですが、これは8の字に近く刻されてる例があります。巡るという意味を同時に持っているのです。土...これは大地、草原や森林の育まれる手のひら、これは年を意味しているのでしょうか。寸、これは手首の脈のあるところを意味していると言い伝えられています。人の生命の心臓の周期、動物の呼吸も繰り返すものの代表的なものでしょう。

周期的という概念に貫かれた、三つの大きなもの、つまり、太陽、地球、自分...それを表したものが時という文字なのです。紐状のものでもこのようなものがあります。注連縄(標縄、七五三縄)などです。ここには周期の数や向きという概念が登場してきます。

私も一度、インドのプーリというところで、皆既日食を見ましたが、この三つのものが一直線に貫かれるのを体験しました。その瞬間は、むかし...いま...これから、という時と言う概念を...何か質量をもった“もの”として実感できたのです。

中南米の古代文明の話をししましたが、そこではクイプ(quipe)というものがあります。これは紐の結び目で日時や個数、名簿などを記憶・記録するためのものです。

アジアやアフリカなどの文明では、文字が発達して、紐の文化は片隅に追いやられたのかも知れません。麻や毛や絹の糸は残りにくいものですが、それでも布に織られた文様や絵詞は今に、色々の経緯はあったでしようが、多く残っております。

おそらくは、皆さんも先刻承知のことでしょうが、法律なども紐の結び目の形などでも書かれていた時代があったであろうことを想像できると思います。

憲法第9条などと云いますし、契約を結ぶ、あるいは契る、などとも云います。

ヒットラーの言といわれていますが、「条約は破るためにある」などの文字列を見ますと、もうこの時代になると一次元の線状のものに記録するのではなくて、二次元の面状の紙などの上に文章が書かれると意識していたことが解ります。

現在も争乱のなかにある、中央アジアのイラクの地ですが...メソポタミア、二つの河の間の地の意味ですが、ここは、「目には目を、歯には歯を」で有名なハンムラビ法典を生んだ土地です。そして、この法律の真意は禁止の方にあるのではないかと考えているのです。つまり、「目には目を、歯には歯を」、それ以上の報復は“してはならない”と...

最初に、夢という字を表題に書きましたが、私は、夢の本質的な意味の一つは“停止”ということにあると思っています。停止は終止ではないのです。亭(あずまや)に佇む人...つまり、立ち止まって、ものに心をおいておく...ということだと思ふのです。

実行の行為には...時期というものがあります。同じ行為も時期を得なければ一般には、

意味のないものになります。数学などの新しい視点の発見は、多くの場合、それらしいものに心をおいて、そっとしているところに訪れることも多いのです。勿論、十分条件ではないことには十分注意しましょう。あたかも、十分条件の如く教育現場などで謂われることもあります。このことには心をおいておく必要があるでしょう。

最後に一つ、自分の経験した体験の話をいたしましょう。それは東京教育大学の助手だった頃の話ですが、友人が自動車を買ったとき、助手席に乗って、千葉の方面にドライブに出かけたことがあったのです。

その場所がどこだったのか憶えていないのですが、麗らかな五月の日に照らされた一面の菜の花畑のなかの一本道で、開かれた窓からの風を楽しんでいたのです。単調な道です。

電信柱がずうっと続いて過ぎてゆきます。しゅっ...しゅっ...えっ！、どうして...と、思ったのです。無風の中の電信柱から“しゅっ”という音が聞こえるのです。でも...電信柱が音を“出す”かしら...

しかし、空耳ではない、確かに音は聞こえる。音の主は...電信柱でないとする...、自動車のエンジン音？、タイヤの摩擦音？。あっ...反射だ！。

...と、まあ、これだけのことですが。後は、トンネルのなかでゴーと響く音を聞いても、橋の上を通るときの音を聞いても、例のやつだ。...成る程、と思うことができた訳です。

何が、その前と後で異なったのでしょうか。平凡なことですが、(自分の力で)解ったのだという感覚の認識の「あるなし」だと思います。

でも、何故、あの何にもない朗らかな菜の花が「舞台」だったのでしょうか。なかったものは「こだわり」、あったものは「自由」な時空と、単調な「繰り返し」。真実は、何時も、そっと“ささやく”。だから、聞く耳をもつ。これが大切と思ったのです。

その後、光も波であると思った。私達がものを見るとき、ほとんどの場合、反射波なのです。自ら光を発するものは、昔なら太陽と星、蛍と雷...火などです。月さえも自ら光ってはいないのです。現在ではテレビや携帯も光を発しますが、音は光の“ひよこ”だったのです。

有限の数(number)のなかには、

$$\text{digits} = 10 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

を有限個ならべて書ききれぬ

$$m_{43} = 2^{32582657} - 1$$

や、有限でも大きな数で、 $0'' = 1, 0''' = 1' = 2, 2'' = 3, 3' = 4, \dots$ として

$$\langle 0 \rangle = +, \langle 1 \rangle = \times, \langle 2 \rangle = \wedge, \dots$$

の延長の定義として

$$\left\{ \begin{array}{l} a \langle 0 \rangle 0 = a \\ a \langle 0 \rangle b'' = (a \langle 0 \rangle b)'' \\ a \langle 0' \rangle 0 = 0 \\ a \langle c'' \rangle 0 = 0' = 1 \\ a \langle c' \rangle b'' = a \langle c \rangle (a \langle c' \rangle b) \end{array} \right.$$

で定義された、

$$2 \langle 4 \rangle 4$$

のような、巨大で、10進数で表現しようとしても、とても地上に存在する記憶媒体では書ききれないものもあります。

因みに、 $4 \langle 2 \rangle 3 = 64, 2 \langle 4 \rangle 3 = 2^{16} = 65536, 3 \langle 3 \rangle 3 = 3^{27} = 7625597484987$  など...です。

有限個の対象から成る数の体系で、加減乗除(+, -, ×, ÷)が、0での除法を除いて自由に行うことのできる体(field, Körper, corps)も沢山あります。

1. 体とは、次の公理系(axiom system)

$$\begin{array}{ll} a+b = b+a & ab = ba \\ a+(b+c) = (a+b)+c & a(bc) = (ab)c \\ a(b+c) = ab+ac & \\ a+0 = a & a1 = a \\ a+(-a) = 0 & a \quad 0 \quad aa^{-1} = 1 \end{array}$$

を(すべて)満足するものです。例えば、 $432/1001$ のような有理数(の全体, rational number)Q、 $\sqrt{619}$ のような代数的数(algebraic number)の全体A、 $\pi = 3.141592654 \dots$ のような実数(real number)の全体R、そして  $i = \sqrt{-1}$  を用いて  $C = \{a+bi : a, b \in R\}$ と表される複素数体(complex number)C、その拡張で、

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

を用いて  $H = \{a+bi+cj+dk\}$ と表されるハミルトンの四元数(quaternion)Hがある。ここでは、 $ij = -ji = k$ のように交換法則  $ab = ba$  は成立しない。更にその拡張で  $O = \{p+ql : p, q \in H\}$ の形で定義されるケーリー(Cayley)の八元数(octonian)O...と続いている。

Oでの算法はHでの  $q = a+bi+cj+dk$  の共役(conjugate)を  $\bar{q} = a-bi-cj-dk$  として

$$(p+ql)(r+sl) = (pr - \bar{s}q) + (ps+qr)l$$

と定める。要するに  $p, q \in H$  に対して

$$p(ql) = (pq)l, (pl)q = (p\bar{q})l, (pl)(ql) = -(\bar{q}p)$$

と定義するのである。従って、例えば

$$l(ij) = lk = -kl, (li)j = -(il)j = (ij)l = kl$$

などのように結合の法則  $a(bc) = (ab)c$  も、一般には成立しない世界であるが、しかし、0でないもので割ることは可能な、可除代数 (division algebra, 斜体 skew field)、なのである。

このような、非結合的な代数の構造の研究、例えば  $\mathbb{O}$  の部分代数など、未知の部分も多く今後の研究にまつ部分が多いのである。

話は戻って、有限個の対象での体、つまり有限体 (finite field) では、素数の任意のべき、 $p^n$  個の元から成る体が一意に存在することが知られている。例えば

$$2, 3, 4 = 2^2, 5, 6 = 2 \cdot 3, 7, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2 \cdot 5, 11, 12 = 2^2 \cdot 3, 13, \dots$$

であるから、

$$\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 25, 29, 31, \dots\}$$

などの個数の体が存在するのである。

$$p = 2$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$$p = 3$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$$n = 4 = 2^2$$

体  $F_2 = 2 = \{0,1\}$  の既約 (irreducible) 2 次多項式  $x^2+x+1$  の剰余  $\{0,1,x,x+1\}$  に 2 を代入する。

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

例えば、 $3 = x+1$  だから、 $3 \times 3 = (x+1)(x+1) = x^2+2x+1 = x^2+1+(x^2+x+1) = x = 2$  のように計算する。 $x^2+1$  を  $x^2+x+1$  で割った余り (=剰余) が  $x$  で  $x = 2$  をこの段階で代入する。

$$p = 5$$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

例えば、 $3+4 = 7 = 2$ ,  $3 \times 4 = 12 = 2$  のように 5 で割った余りを対応させる。

$$p = 7$$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	1	2	1

例えば、 $3+6 = 9 = 2$ ,  $3 \times 6 = 18 = 4$  のように  $p = 7$  で割った余りを対応させる。

$$n = 8 = 2^3$$

今度は、体  $F_2 = 2 = \{0,1\}$  の既約 (irreducible) 3 次多項式  $x^3+x+1$  の剰余

$$8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\} = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$$

に 2 を代入する、あるいは、単に  $x$  を 2 と思う。

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	3	1	7	5
3	0	3	6	5	7	4	1	2
4	0	4	3	7	6	2	5	1
5	0	5	1	4	2	7	3	6
6	0	6	7	1	5	3	2	4
7	0	7	5	2	1	6	4	3

各行列には同じ数字は現れない。例えば、

$$3+5 = (x+1)+(x^2+1) = x^2+x+2 = x^2+x = 6$$

$$3 \times 5 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1+(x^3+x+1) = 2x^3+x^2+2x+2 = x^2 = 4$$

2.  $xy$  平面の 3 次曲線が可換群を成すこと。

群とは、結合の法則と単位元  $e$ 、逆元  $a^{-1}$  があり、性質

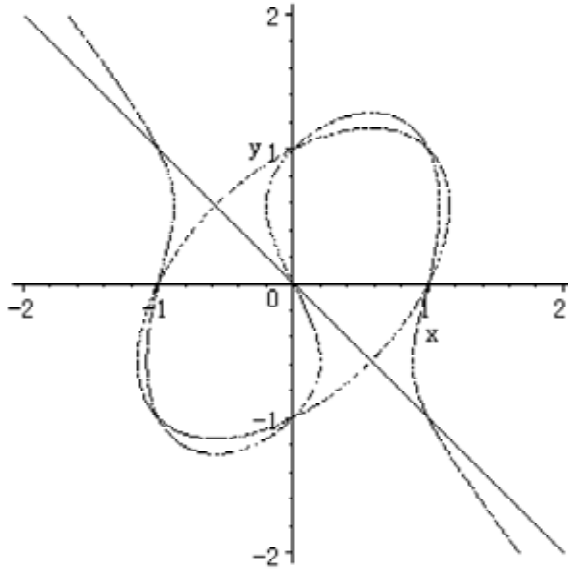


$$a(bc)=(ab)c, \quad ae = ea = a, \quad aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

をもつ体系のことです。特に、 $ab = ba$  のとき、可換群(commutative (= abelian) group) といふ。

例えば、次の図は、一方は、直線と楕円に分解し、他方は既約です。

$$\begin{aligned} x(x^2-1)+y(y^2-1) &= (x+y)(x^2-yx+y^2-1) = 0 \\ 2x(x^2-1)+y(y^2-1) &= 0 \end{aligned}$$



そこで、3次曲線

$$C: 2x(x^2-1)+y(y^2-1) = 0$$

を考えてみましょう。この曲線の上には、勿論、9個の整数点

$$(1,-1), (1,0), (1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (-1,-1), (-1,0), (-1,1)$$

があります。例えば、 $O(-1,1)$ を単位元とする群としての算法  $+$  を定義してみましょう。P, Q をこの曲線 C 上の点として、P と Q を通る直線と C の、P, Q と異なる交点を PQ とし、O と PQ を結ぶ直線と他の交点を  $O(PQ)$  と記すことにしましょう。

P と Q の和  $P+Q$  を

$$P+Q = O(PQ)$$

と定義すれば、3次曲線 C は O を単位元とする可換群になるのです。Poincaré-Mordell の群と呼ばれています。

例えば、 $P(-1,0), Q(0,0), R(0,-1)$  で

$$(P+Q)+R = P+(Q+R)$$

を示してみよう。 $\overline{PQ}$  は  $y = 0$  だから、 $PQ = (1,0)$  である。この点と  $O(-1,1)$  を通る直線は  $x = 1-2y$  だから、これを代入すると  $2x(x^2-1)+y(y^2-1) = -3y(y-1)(5y-3)$  で、当然 0, 1 は解だから、 $y = 3/5, x = -1/5$ 、つまり  $P+Q = (-1/5, 3/5)$  を得る。同様に、 $\overline{R(P+Q)}$ 、つまり、 $(0,-1)$  と  $(-1/5, 3/5)$  を結ぶ直線は、 $y+8x+1 = 0$  であるから、 $y = -8x-1$  を代入して、

$$2x(x^2-1)+y(y^2-1) = 6x(5x+1)(17x+3)$$

故に、 $x = -3/17, y = 7/17$  である。つまり、 $R(P+Q) = (-3/17, 7/17)$  である。 $(-1,1)$  と  $(-3/17, 7/17)$  を結ぶ直線は  $-7y-5x+2 = 0$  であるから、 $x = -7/5 \cdot y + 2/5$  を代入して、

$$2x(x^2-1)+y(y^2-1) = -3/125 \cdot (y-1)(17y-7)(11y+4)$$

故に、 $y = -4/11, x = 10/11$  である。これは、

$$R+(P+Q) = (10/11, -4/11)$$

であることを意味している。また、 $QR = (0,1)$  であるから、 $Q+R = (1,1)$  であり、従って  $\overline{P(Q+R)}$  は  $x-2y+1 = 0$  であり、 $x = 2y-1$  を代入すると、

$$2x(x^2-1)+y(y^2-1) = y(y-1)(17y-7)$$

故に、 $y = 7/17, x = -3/17$  である。要は

$$P(Q+R) = (P+Q)R = (-3/17, 7/17)$$

という“一点”にある。従って、勿論、結合法則

$$P+(Q+R) = (P+Q)+R = (10/11, -4/11)$$

が成立しているのである。ここでは、異なる 2 点について論じたが、2 点が重なるときは接線を考えるのである。

$x-2y+1 = 0$	$x = 0$	$x+2y-1 = 0$	line
$Q+R(1,1)$	$QR(0,1)$	$O=(-1,1)$	$y = 1$
$P(-1,0)$	$Q(0,0)$	$PQ(1,0)$	$y = 0$
$P(Q+R), (P+Q)R$	$R(0,-1)$	$P+Q(-1/5, 3/5)$	$y+8x+1 = 0$

この式の内容は、3本の直線から成る二つの集合 A, B があり、A, B のどんな直線も平行でないとき 9 個の交点が定まるという当然のことである。

$$x(x-2y+1)(x+2y-1) = 0$$

$$y(y-1)(y+8x+1) = 0$$

の両方が

$$C: 2x(x^2-1)+y(y^2-1) = 0$$

と 9 個の点

$$O, P, Q, R, PQ, QR, Q+R, P+Q, P(Q+R)=(P+Q)R$$

を共有しているのである。実際には、もとの曲線も 3 直線の方程式の重み付きの和であるが、上の二つの 3 次式の 2:1 の重み付きの和である：

$$2x(x^2-1)+y(y^2-1) = 2x(x-2y+1)(x+2y-1)+y(y-1)(y+8x+1)$$

現実の計算では、3 次曲線を

$$y^2 = x^3+ax+b$$

の形のワイエルシュトラス標準形(Weierstrass normal form)に変形して計算するのが普通である。

途中の計算を省略して、結果のみ記すると  $2x(x^2-1)+y(y^2-1) = 0$  は

$$s = 1/2 \cdot (4x-y-1)/(2x+1+y), t = -3/4 \cdot (4x+3y^2+2y-1)/(2x+1+y)^2$$

によって、

$$t^2 = s^3 - 3/4 \cdot s + 5/16$$

という一つの標準形に導かれる。

### 3. 楕円曲線その他

楕円曲線をめぐる話題のなかには、軸をもったコマ(独楽、top, toupie)の運動の話があります。つまり、軸対称な剛体(solid body)がその軸上に固定点をもつ運動に関するもので、これは  $xy$  の 3 次曲線(=楕円曲線)を用いて記述できることが知られています。これはラグランジュ(J. F. Lagrange, 1736-1813)のコマとして有名な例です。

また、神秘的な、5 次多項式  $f(x)$  を用いて

$$y^2 = f(x)$$

の形の、所謂、超楕円曲線(hyper-elliptic curve)を用いて記述できる、コワレフスカヤ(Sofya, V. Kovalevskaya, 1850-91)のコマやジャイロスコープ(Kovalevskaya gyroscope)などが有名です。これは、慣性行列が

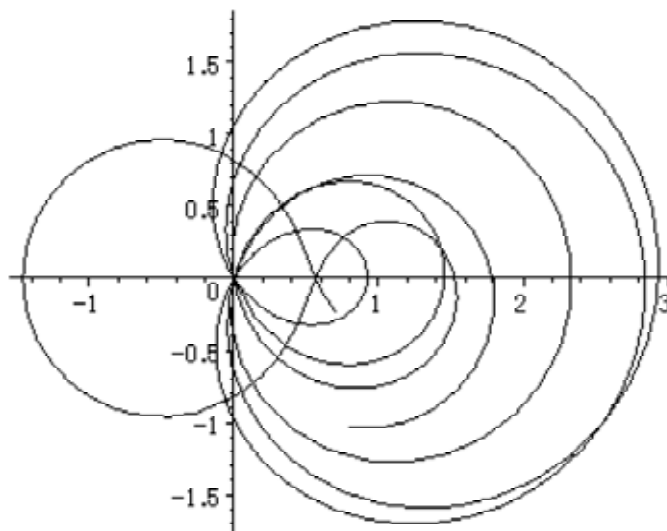
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるもので、複素数の概念が本質的に用いられていて、現代の可積分系の理論の“さきがけ”となったものです。

神秘的といえば、その代表的例は、勿論リーマンのゼータ関数(Riemann's  $\zeta$ -function)でしょう。

次の図は、 $\zeta(1/2+it)$  の  $t = -5 \sim 40$  の(複素数値)グラフです。所謂、critical-line 上の値を示したものです。絵として鑑賞してください。

$$\zeta(1/2+it): t = -5 \sim 40$$



最初の 1 回だけ、原点を逆方向に回転しているのも印象的です。複素数としての値は、例えば、violin の新しい弦を、折られた紙の中から、出したように素直な弾力的な線を描いている。原点の処で縛られている様子がわかります。

しかし、ずっと先までそうでしょうか。リーマンの予想(Riemann's hypothesis, RH)は、

そのようであろうと思った結果でしょうか。兎も角、リーマンが最初に計算をして、最初の0点  $1/2+it$

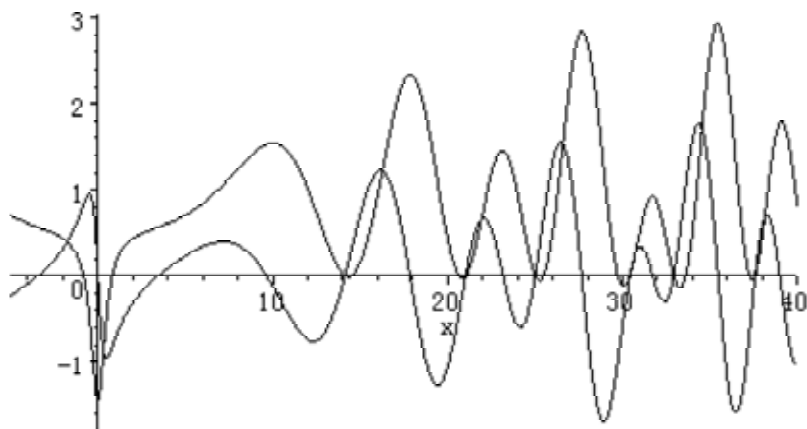
$$t = 14.134725 \dots$$

を見つけたときの驚きと感動がどんなに深かったか想像できます。リトルウッドは、恐らくは、大変に大きな数のところで RH は成立しないかも知れないと考えていました。

今はまだ、証明も反例(counter example)も見つかっていませんが、もし証明が見つかるとしたら、その一つの候補は、何か自然な自己共役(self-conjugate operator)あるいはユニタリー作用素(unitary operator)の固有関数と固有値に関係するという形になるかも知れません。

何か、夢のまゝ残ってほしいと思われるほどの、真実の重みを感じさせる“問いかけ”(quest)なのです。

次の図は  $\zeta(1/2+it)$   $t = -5 \sim 40$  の実数部分と虚数部分を描いたものです。上の軌跡の図と対照して見るとよいでしょう。二つの曲線が実数軸の上で交互に交わっている様子が分かります。



次の図も、合同ゼータ関数(congruence  $\zeta$ )と関係していると思いますが、これは有限のすべての体のを結びつけるものである。

例としてであるが、超楕円関数

$$y^2 = x^5 + 5x + 5 = f(x)$$

について、周期や面積を表現していると思われる式に対応する、有限体での和

$$f_1(u) = f(x) \otimes x+u, f_2(u,v) = f(x) \otimes x^2+ux+v,$$

$$a_p = \sum_x (f_1(x)/p), b_p = \sum_{x,y} (f_2(x,y)/p)$$

で定まる多項式の絶対値  $\sqrt{p}$  複素数の根を plot したものです。

$$x^4 + a_p x^3 + b_p x^2 + p a_p x + p^2 = 0$$

$$p = 3 \sim 24097$$

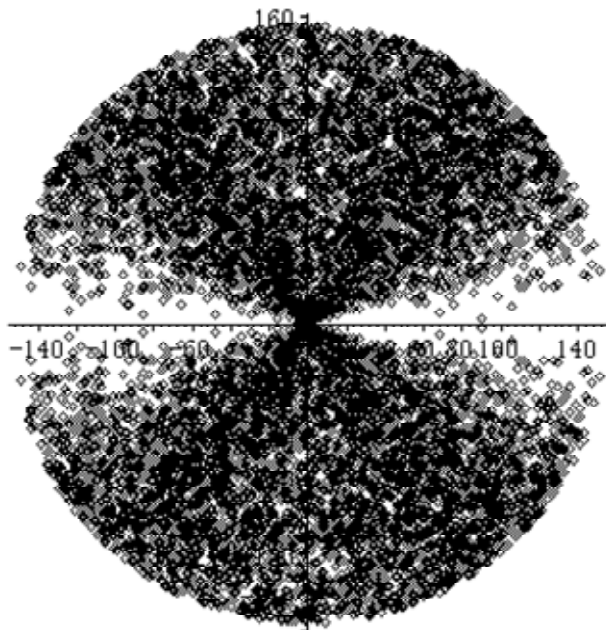
この分布は

$$\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta$$

に比例すると予想されています。所謂、佐藤・テイト- $\sin^2 \theta$  予想(Sato-Tait  $\sin^2$ -conjecture)

ですが、これも未知の要素を含む問題です。最近、楕円曲線に関する  $\sin^2\theta$  -予想が解かれたとのニュースが話題になっております。

自然の認識が、少しずつ深い部分に到達している様子が見えます。



また、有限体の上で、楕円曲線

$$C: y^2 = x^3 + ax + b$$

を群と考えたときの元の個数、つまり、位数(order)を表す、帯球関数

$$a_{12}(z) = z^{+1/4} \cdot P_{[p/6]}(\sqrt{z})$$

の値を、原始根のべきの順に並べたものを係数とする多項式から、一般的な方法で、2 度行くと元に戻る写像、所謂、巡回対合(cyclic involution)が定義できる。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 8 & -4 \\ -1 & 6 & 8 & -4 & 2 \\ 6 & 8 & -4 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & 2 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & -6 & 2 & 6 \\ 6 & -6 & 2 & 6 & 3 \\ -6 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

のような、“輪”になった列です。勿論、この例では

$$11^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2$$

であり、任意の個数ずらした列とは、積の和が 0、つまり、直交している。例えば、左の行列に 1 行と 2 行では

$$2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot (-4) + (-4) \cdot 2 = -2 - 6 + 48 - 32 - 8 = 0$$

のようです。何もしないこと、つまり恒等写像(identity)を E、A を対合、つまり

$$A^2 = E$$

という性質、自分自身を認識すること、元に戻す、という作用は、位置の認識や記憶や状態の変化の認識などに関係して、精神・社会的な概念とも関係しているのです。

例えば、 $p = 47 = 23 \cdot 2 + 1$  で、 $a_{12}(x) = x^{11}(18x^3 - 11x^2 + 5x - 11)$  である。5 は原始根で、その表現変換式  $\overline{a_{12}}(x) = \sum_{n=0}^{p-1} a_{12}(5^n) x^n$  の  $x^{23} - 1$  での剰余の係数列として

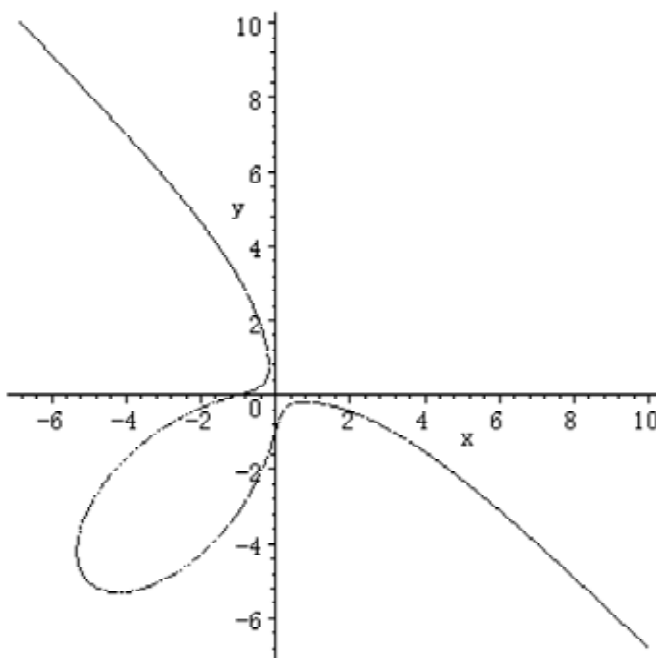
$[-3, 5, -9, -15, -14, -14, 17, 2, 6, 3, -8, 15, 4, -13, 9, 2, -7, -18, 7, -8, -2, -9, 3]$

のような、ずらした列と常に直交する列が定義できます。

#### 4. あそび

a. 遊びのための絵です。以下のものは 3 次曲線の例です。

$$x^3 + y^3 + 10xy + 1 = 0$$



曲線は、何でも良いのです。この上に単位元  $O$  と、 $P, Q, R$  をとって結合法則など画いてみましょう。鉛筆を使うことを勧めます。点の取り方によってはこの図の範囲に収まらないからです。物差しで直線を書くことで法則を実感できるでしょう。

b. 元の数が  $9 = 3^2$  個の体の加法と乗法の表を作ってみましょう。

3 個の元より成る体  $F_3 = 3 = \{0, 1, 2\}$  の上の、既約な 2 次式  $x^2 + 1$  をとってみましょう。

$$F_9 = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$$

を考え、 $x = 3$  と思うのです。例えば

$$4 + 5 = (x+1) + (x+2) = 2x+3 = 2x = 6$$

$$4 \times 5 = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2 - (x^2 + 1) = 3x + 1 = 1$$

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

## 5. 資料など

これは、ある王璽のコピーからのコピーです。

王璽を細い糸で吊し、コップの水中に吊して計る。

1. 底に付けたとき、328g
2. 水中に保持したとき、208g
3. 水から引き上げたとき、190g
4. 乾燥させて単独で計ったとき、138g

比重は、亜鉛 7.13、錫 7.31、鉄 7.87、銅 8.96、銀 10.5、水銀 13.56、金 19.32 である。  
これから、少なくとも純度の高い(金でない)ことは解る。

最初、時は問題ないとして、次が数(=數)であるか、敏であるか、その他どんな可能性  
があるでしょうか。仮に時數であったとき、この時の人々の様子がしのべれます。

なんば かんじ (東京大学名誉教授)