2006 年度代数学賞

2006 年代数学賞は，花村昌樹氏（東北大学大学院理学研究科）と吉田敬之氏（京都大学大学院理学研究科）の二人が受賞されました．以下に二人の業績を簡単に紹介いたします.

花村昌樹氏「混合モチーフの理論の構成」

「モチーフ」を一言で述べるなら，代数多様体全体のなす圏から加法的な圏を自然に構成し，そこにおいてホモロジー代数を展開し，代数多様体の様々なコホモロジー理論の背後にある普遍的コホモロジー理論を見出すこと，ということになるでしょう.

モチーフのアイデアは 1970 年代の Grothendieck にさかのぼります．彼は Weil 予想を解決するためエタールコホモロジー理論を開発し，有限体上の多様体の合同ゼータ関数を，エタールコホモロジーへのフロベニウス作用の固有多項式で表示しました．Weil 予想で残された部分，すなわちフロベニウス作用の固有値の絶対値に関する予想を解決するアイデアとして，モチーフの概念が登場したのでした．Weil 予想自体は Deligne が別の方法で解決しましたが，Grothendieck のモチーフの哲学は，Deligne の混合 Hodge 構造理論で導入された weight の概念と融合して,「混合モチーフ」の概念へと発展したのです.

少し専門的になりますが，Grothendieck の純モチーフと混合モチーフの違いを説明したいと思います.

基礎体 k を固定しておきます．k 上の射影的かつ非特異な多様体に対して定義される種々のコホモロジー理論 （Weil コホモロジー理論）の背後に共通原理として潜むものが Grothendieck の k モチーフの圏 $\mathcal{M}_k$ です．彼は,「標準予想」を仮定すると，$\mathcal{M}_k$ が存在して半単純なアーベル圏をなすことを示しました．一方，射影的とも非特異とも限らない一般の多様体の一般コホモロジー理論についても，その共通原理として混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}_k$ があると予想されました．$\mathcal{MM}_k$ は $\mathcal{M}_k$ を含む圏ですが，半単純な圏ではありません．半単純でないことから，$\mathcal{MM}_k$ においては Ext など，非自明なホモロジー代数理論が展開されます．実際 k 上の多様体 X のモチヴィックコホモロジー $H^n_M(X, \mathbb{Z}(r))$ を $\mathcal{MM}_k$ における高次 Ext 群（$\mathcal{MM}_k$ の導来圏における射の空間）として定義すると，これが k 上の多様体の普遍的なコホモロジー理論を与えることが期待されました．S. Bloch は，多様体 X の代数的サイクルや Chow 群 $CH^r(X)$ を一般化して，高次サイクルや高次 Chow 群 $CH^r(X, q)$ を導入するとともに，高次 Chow 群と代数的 K 群の関係を明らかにしました．Bloch の仕事は，滑らかな多様体 X に対するモチヴィックコホモロジーと高次 Chow 群との間の等式 $H^n_M(X, \mathbb{Z}(r)) = CH^r(X, 2r - n)$ を強く示唆するもので，これがその後の $\mathcal{MM}_k$ の構成の道標となりました．この等式は，多様体 X の

モチヴィックコホモロジーが数論的にも重要な不変量であることを示します．その理由は，数論的多様体（有限体や代数体上定義された多様体）のゼータ関数の整数点における零点の位数や，そこでの冪級数展開の最初の係数を予想する公式（Tate 予想，Birch-Swinnerton 予想，Lichtenbaum 予想，Beilinson 予想，Bloch-Kato 予想）においては，代数的 K 群や Bloch の高次 Chow 群が基本的な役割を果たすからです．

混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}_k$ の圏の構成はこのように代数幾何学・数論幾何学における基本的課題ですが，花村氏はこの構成問題に本質的な貢献を行ないました．k 上の混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}_k$ それ自身が存在するかはまだ不明ですが，花村氏は $\mathcal{MM}_k$ の導来圏に相当するはずの圏 $\mathcal{DM}_k$ と，k 上の多様体 X に付随する混合モチーフと呼ぶべき対象 $M(X) \in \mathcal{DM}_k$ を構成し，これらを用いて，非特異な多様体 X に対する公式

$$CH^r(X, 2r-n) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{DM}_k}(M(\mathrm{Spec}(k)), M(X)(r)[n])$$

を証明したのです．この公式は Bloch の高次 Chow 群を，モチヴィックコホモロジー，つまり $\mathcal{DM}_k$ における射の空間として表現しています．また $\mathcal{DM}_k$ の t-構造に関するいくつかの予想を仮定すると，$\mathcal{MM}_k$ に相当する部分圏を取り出すことも可能となります．

花村氏とは独立に，Voevodsky と Levine もそれぞれ同様の性質をもつ圏の構成を行っていますが，方法はまったく異なります．(Voevodsky と Levine の構成した圏が同値であることはすでにわかっていましたが，花村氏は自身の構成した圏と彼らの圏が同値であることを示しました)．花村氏の $\mathcal{DM}_k$ の構成は，「$\mathcal{DM}_k$ の対象とは，射影的で滑らかな多様体に付随するモチーフの“複体”である」という自然な着想に基づいています．具体的には，Deligne がその混合 Hodge 構造の理論において用いた hypercovering を改良した cubical hyperresolution の手法と “複体”概念を一般化することにより対象を構成しているのです．多少単純化すると，$\mathcal{DM}_k$ の対象はデータ $(K^m, f^{m,n})$ です．ここで $K^m = \bigoplus_{\alpha \in I(m)}(X_\alpha, r_\alpha)$ は適当な集合 $I(m)$ で添字付けられた非特異射影多様体 X_α と Tate twist に対応する整数 r_α の組で，$f^{m,n} = (f^{m,n}_{\alpha,\beta})$ は K^m から K^n への “境界写像”で、$X_\alpha \times_k X_\beta$ 上の Bloch の高次サイクルにより与えられます．境界写像 $K^m \to K^n$ が $n = m \pm 1$ の場合のみにある通常の複体概念を拡張しているわけです．

以上の構成は Bloch の高次 Chow 群をホモロジー代数的に扱うことを可能とします．これは少なからぬ利点で，たとえば花村氏自らこの理論を用いて，Goresky-MacPherson の交叉コホモロジーの理論を “交叉 Chow 群”あるいは‘交叉高次 Chow 群”の理論へと発展させています．また花村氏は氏の混合モチーフ理論を更に発展させ，パラメータ付混合モチーフともいうべき「混合モチーフ層」の理論を構築しつつあります．多様体 X 上の混合モチーフ層の圏 $\mathcal{MM}(X)$ は，X 上の Perverse 層の圏や Hodge 加群の圏の共通原理としてそ

の存在が期待されているものであって，$X = \mathrm{Spec}(k)$ の場合の $\mathcal{MM}(X)$ が上述の $\mathcal{MM}_k$ にほかなりません．$\mathcal{MM}(X)$ の構成はまだ未完成で，花村理論の今後の発展が期待されます．

モチヴィックコホモロジーは代数幾何学および数論幾何学において重要な役割を担う研究対象であり，花村氏の仕事はこの分野に大きな実りをもたらすものと期待されます．氏の業績は国際的にも高い評価を受けており，代数学賞受賞にふさわしいものです．

吉田敬之氏「保型形式と周期の研究」

数論的多様体とそのコホモロジー類の最も豊かで興味深い例は，いうまでもなくモジュラー多様体と保型形式です．吉田敬之氏は，研究者としての出発以来，一貫して保型形式理論とその周辺を深く詳しく研究してきました．このたび授賞の対象とされたのは，氏が最近10年ほどにあげられてきた業績で，大きく分けて三つの話題（Hilbert 保型形式，Siegel 保型形式，絶対周期記号）を扱っています．それぞれについて簡単に解説します．

(1) Hilbert 保型形式の周期に関する志村予想の解決

周期の研究は，保型形式の理論において重要なウェイトを占めています．ここでいう周期とは, 保型形式が定義されている多様体のサイクルで保型形式を積分して得られる量のことです．保型形式から得られる L 函数の特殊値をこのような周期と関係付けて調べるのは，周期の研究の中心的話題です．たとえば n を $0 < n < k$ なる整数とするとき, 一変数の重さ k の尖点形式 f に対して周期

$$\int_0^\infty f(it)t^{n-1}dt$$

を考えることができますが, これらの周期の本質的部分は符号 $\varepsilon = (-1)^n$ だけで定まることが知られています．この周期（の本質的部分）を $c^\varepsilon(f)$ で表すと L 函数の特殊値 $L(n,f)$ は 2 つの周期 $c^+(f)$, $c^-(f)$ によって表される, というのが古典的な Eichler-志村の理論です．

志村五郎氏はこの理論をさらに総実代数体上の Hilbert 保型形式に対して拡張しました．F を n 次の総実代数体, $\mathbf{f}$ を F 上の Hilbert 保型形式とします．志村氏は $\mathbf{f}$ から生ずる L 函数を深く研究し, このような L 函数の特殊値が, F の n 個の無限素点における符号分布に応じて得られる 2^n 個の周期で表されることを証明したうえで，この 2^n 個の周期が実は本質的には $2n$ 個の周期の組み合わせによって得られることを予想しました．吉田氏はこの予想に取り組み，重さが非常に小さい例外的な場合を除くと，志村の予想が正しいことを証明しました (*On a conjecture of Shimura concerning periods of Hilbert modular forms*, Amer. J. Math. **117** (1995), 1019 – 1038).

(2) Siegel 保型形式の基本的周期と L 函数の特殊値の研究

花村氏の項で解説したように，大雑把に言って（純）モチーフとは，代数多様体のコホモロジーの直和成分から得られる仮想的な対象です．モチーフ M から得られる L 函数の特殊値 $L(n, M)$ は M から得られるある種の周期で表される，というのが有名な Deligne の予想です．

種々の保型形式に対してモチーフを対応させることができると一般に信じられています．吉田氏は，次数 m の Siegel 保型形式 f に対して，対応するモチーフの存在と Deligne の予想をひとまず仮定すれば，

(a) f は高々 $m+1$ 個の基本的な周期をもち，

(b) f から生ずる種々の L 函数の特殊値は，これらの基本的な周期の組み合わせによって表される，

ということを示しました (*Motives and Siegel modular forms*, Amer. J. Math. **123**(2001), 1171 – 1197)．

吉田氏のこの仕事は一変数保型形式に関する Eichler-志村理論を多変数 Siegel 保型形式の場合へと拡張するもので，Siegel 保型形式から生ずる L 函数の研究に一つの明快な見通しを与えたものとして，高く評価されています．

(3) Artin の L 函数の対数的導関数の特殊値と絶対周期記号の研究

志村五郎氏は CM 型のアーベル多様体のいろいろな周期が，単項関係式とよばれる関係式を満たすことを示しました．この関係式を用いると，周期に対する双線型形式 $p_K(\sigma, \tau)$ が定義され，志村の周期記号と呼ばれています．K を CM 体で $\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大であるもの，ψ を $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の表現で複素共役に関するある種の条件を満たすものとします．吉田氏は ψ から定まる Artin の L 函数 $L(s, \psi)$ の対数的導関数 $L'(s, \psi)/L(s, \psi)$ を考察しました．吉田氏は多くの数値計算に基づき，特殊値 $\exp(L'(0, \psi)/L(0, \psi))$ が志村の周期記号を用いて表されること（２次体に対する Chowla-Selberg 公式の一般化）を予想し，特殊な場合にはこの予想が実際に成り立っていることを示しました．さらに吉田氏は新谷氏の錐体分解と Barnes の多重 Γ 函数を用いて絶対周期記号 $g_K(\sigma, \tau)$ を定義し，志村の周期記号は本質的には絶対周期記号で表されると予想しました．この絶対周期記号を用いることによって，上記の予想はより精密な形で定式化されることになりました．

これらの予想は Hilbert の第 12 問題（類体の構成問題）の解決につながるものとして，多くの研究者の注目を集めていて，吉田氏はこの話題についての一連の成果を著書 *Absolute CM-Periods* (Mathematical Surveys and Monographs Vol. 106, AMS, Providence, RI, 2003) にまとめています．また加塩朋和氏との共同研究において，この予想の p 進的な類似についても研究を進めています．

以上のように吉田氏の研究は L 函数の特殊値と保型形式の周期の研究を本質的に深めるものであり，代数学賞を受賞するのにまことにふさわしいものです.

(代数学賞委員会委員長　伊吹山知義　大阪大学大学院理学研究科)