書　　評

数の本
J.H.Conway and R.K. Guy 著，根上生也訳，
シュプリンガーフェアラーク社

杉山 健一 (千葉大学)

一言で言えば，様々な数の由来とその性質を扱った，次に何が飛び出すのか分からないびっくり箱のような本である．以下，どのような数が，どのように登場するかを本書の内容に従って説明しよう．

まず第１章からして面白い．この章では，数え方と数の表記法について述べられている．物の数え方が，日常の言葉にどのように形を変えて現れるか，また数の表記法は，どのような歴史をその背景に宿しているかについて，具体的な例を挙げて説明されている．(例えば,「biscuit（ビスケット）」の中に現れている「bis」は,「２回」を意味する接頭辞であるが，これは，ビスケットの定義はクッキーを２度焼きしたものだからだそうである．浅学の評者はその事実を知らなかった！）
ある正多角形を埋め尽くすように球を並べた時，必要な球の個数を多角数と呼ぶことにすると，第２章で扱われているのはこの多角数（あるいはその高次元版）であり，その性質を視覚的に理解することに主眼が置かれている．例えば，n 個の奇数の和が n 番目の平方数 n^2 に等しいという事実が，色つきの正方形を用いて説明されていて，数式に馴染みのない人にも十分理解できるように心配りがされている．
「法則の見えない数列を扱う時は，その階差を取ると良い」というアラン-チューリングの格言があるが，それは数列の第 n 次項 a_n は n についての多項式 $f(n)$ により表されることが多く，また階差を取ることはいわば多項式を微分することに相当するので，階差を取ることにより $f(n)$ の係数が求められる，という理由による．第３章では，具体的な問題から一般項の予測し難い数列を作り，その一般項を階差を用いたニュートンの公式を用いて求める

方法を説明している．もちろんこの方法は万能ではなく，フィボナッチ数列のように階差を取っても変わらない数列があるが，さらにそのような数列の取り扱いについても言及している．

自然界は，時としてある特殊な数を好むことがある．私達が最も目にするのは，黄金数 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であろう．実際，黄金数は巻き貝の巻き方やひまわりの花序等に現れるが，第４章でその理由が解明されている．またこれは，フィボナッチ数列の一般項を求める際にも現れるが，フィボナッチ数列に現れる数をフィボナッチ数と呼ぶことにしよう．この章では，フィボナッチ数，カタラン数，ベルヌーイ数やオイラー数など人名のついた数も扱っている（より正確には，そのような数がこの章の主人公）．ラマヌジャンの研究に現れる分割数についてはあっさりと書かれているが，実はこれは保型形式と関係が深い．(この本は一般の人向けに書かれているので，そこまで立ち入ることは控えたのであろう）また，ラマヌジャン数 $\tau(n)$ について,「$\tau(n)$ は n の 11 乗の総和と 691 を法にして合同になります」（ラマヌジャン合同）という記述があるが，この事実は数論幾何学を用いても証明され，ラマヌジャンの研究が如何に時代を超越していたかを表している．

第５章は素数の章である．素数 p を法にする計算方法を説明した後，フェルマー数 $2^{32}+1$ が素数でないことを，2^{32} が 691 を法にして -1 と合同になることを計算して証明している．また，２進法表記を用いてメルセンヌ数 $2^{15}-1$ が素数でないことを示したり，メルセンヌ素数と完全数の関係を説明したり，さらにはフェルマーの小定理が現れたりなど面白い事実が盛りだくさんである．この章を初めて読んだ時の感覚は，ちょうどクワガタ虫やカブトムシのたくさんいる林に入って興奮した時のそれに良く似ていた．最後に，N 以下の素数はどれだけあるかという素数分布の話題に触れられており，当然ながらリーマン予想についても言及されている．

第６章では分数が扱われているが，例によって非常に面白い方法で取り扱われている．分数を小数展開すると循環小数になるが，ここでは p を素数としたとき分数 $\frac{m}{p}$ $(1 \leq m \leq p)$ を循環小数に展開したときの，サイクルの長さとそのパターンを有限素体の乗法群 $\mathbb{F}_p^{\times}$ を用いて説明している.（もちろん具体的に説明されている.）特にフェルマーの小定理を，循環小数の視点から説明するあたりは読者を唸らせるものがある．私も何度か数学科以外の学生に有限体を講義したことがあるが，有限体の性質に親しみ，その意義を理解するにはそれ相当の時間がかかるため，学生達にとってはいまひとつピンと来なかったようである．しかしこのような説明であれば，有限体を無理なくを説明できると痛感した．また，２８，３０，３１日を一ヶ月とするカエサル歴や４年に一度，一年を３６６日とする閏年に代表されるように，暦を修正するためにいろいろな工夫がされている．また，２３５ヶ月が１９年に近いことを利用して（メトン循環期），ユダヤ歴が作られているが，ここではこのような暦の修正や作り方が連分数展開を用いて説明されている．

第７章は，定規とコンパスのみを用いた作図問題などの幾何学の問題と代数的数との関係や，無理数についての章である．定規とコンパスによる作図は，ある２次方程式の解を図により求めることに他ならないことは良く知られた事実だが，ここではギリシャ以来の歴史をふまえて説明されている．また，$\sqrt{2}$ が無理数であることの，図形を用いた分かりやすい証明から，黄金数にいたる説明は,（必ずしも数学を専攻とはしない）一般の学生に対しても十分に興味を喚起すると思われる．
第８章では，実数以外の数が登場し，特に複素数については，そのまま教科書として使えるくらいに丁寧に説明されている．また，複素数の一般論のみでなく，ガウス整数 $\mathrm{Z}[i]$ やアイゼンシュタイン整数 $\mathrm{Z}[\omega]$($\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ は１の原子３乗根) についても触れており，それぞれの整数環での素因数への一意分解性や平面幾何学への応用が説明されている．驚くべきことに，素因数への一意分解が成立しない虚２次体の例（つまり，類数が１でない例）や実数上の，結合法則を満たすとは限らないが除法を持つ代数は，実数，複素数，ハミルトンの４元数，ケーリー代数に限るというアダムスの結果にも言及している.（この証明には，何とトポロジーが用いられる!）
私達に馴染みのある超越数 π や e は第９章で扱われていて，特に有名なオイラーの公式 $e^{i\pi} = -1$ が直観的に分かりやすく証明されている．この結果は今となっては良く知られた事実であるが，α, β を代数的数としたとき，αe^{β} は超越数となるというリンデマンの結果と比べると如何に驚くべき結果であるかということが自然に感じ取られるような記述になっている．
(リンデマンとベーカーにより，一般に b と x を代数的数としたとき，明らかな反例を除いて

$$\cos x,\ \sin x,\ \tan x,\ \log_b x,\ \ln x,\ e^x$$

は超越数になることが知られている．)
第１０章は，いわゆる順序数についての説明であるが，これは数学科における集合論の授業においてもそのまま使えそうな高度な内容を扱っている．しかし，例によってその説明は非常に分かりやすい.

読後の感想は，とても面白かった，に尽きる．また，数にまつわる話題を，よくもまあこれだけ提供出来たものだと，著者の博識には恐れ入るばかりである．記述はとても丁寧で，数学や自然科学の入門書にありがちな，読者にフラストレーションを持たせるようなことはない．話題の提供が，常に身近な例から始まっているので，高校生や，あるいは数学を得意とする中学生にでも勧められる本である．また，数学の専門家に対しても，数の意外な側面や数にまつわるエピソードなどを知ることができる，とても楽しい本と思われる．