証明ってなんだろう

瀬山士郎

2002年10月3日

はじめに

本稿は，2002年10月3日に藤岡市立小野中学でおこなった藤岡市教育委員会主催，日本数学会後援の「おもしろ数学教室」の概要です．この講演では中学1年生から3年生までの約300人の生徒を対象に「証明ってなんだろう」というタイトルで2時間程度の話をしました．1年生はまだ数学を学び初めてから半年程度で証明という言葉自体を学んでおりません．また，2年生はちょうど図形の性質の証明を学びはじめるところでした．3年生はもちろん証明を学んでおり，数学にかなりの程度親しんでいます．当日は群馬ローカルの話も含めて，なるべく平易に証明とは何かを説明したつもりです．具体的な教具も1つ用意して，それを使って誤った証明の例なども紹介しました．フロアからの生徒たちの生の声を拾い上げて，できる限り対話をしたいと考えました．当日は講演のあと，生徒たちとの質疑応答もあり，学力問題や教科書の内容削減問題についての質問もあったのですが，この原稿では割愛しました．

ここでは，その場では話したりなかったこと，説明不足だったことなどを補いながら，できる限り当日の雰囲気を再現して見たいと思います．

初めまして．御紹介いただきました瀬山士郎です．群馬大学教育学部で数学の教員をしています．生まれたのは1946年，藤岡のとなりの富岡市ですが，中学２年生のときまで高崎で育ちました．その頃の高崎はまだのんびりとしたところで，烏川の河原も野原でしたし，高崎城址のお堀でエビガニなんかが釣れたし，水カマキリやゲンゴロウなどの水棲昆虫もたくさんいました．今は新幹線も通るようになり，高崎もずいぶん大都会になってしまいました．綺麗にはなりましたが，少し騒がしくなったような気もしてます．高崎映画祭はとっても楽しみですが．

今回は皆さんに数学の話をするということで，小野中に呼んで頂きました．中学１年生から３年生までに同時に数学の話をするのは初めてで，緊張していますが，数学の話と聞いて皆さんも少し緊張しているかも知れませんね．緊張している人いますか？

うん，最初に落ち着くために少し質問をしてみたいと思います．数学が好きな人はどれくらいいますか？ちょっと手を挙げてみて，ああ，好きな人はたくさんいますね．ほっとします．それでは数学は嫌いだっていう人はどれくらいいますか．なるほど，嫌いな人のほうが少し多いみたいかな．じゃあ，算数は好きだったけど数学は嫌いになったという人いますか？何人かいますね．では君に聞いてみましょう．

質問「数学のどんなところが嫌いですか」

答え「文字を使って計算するとこ」

なるほど．文字式の計算が嫌っていうことですね．文字式の計算は初めてなので嫌だなと思う人もいるでしょうね．他に何かありますか？（筆者はここで証明が嫌いだという生徒がいるのではないかと思っていたのですが，直接そう答えてくれた生徒はいませんでした）．

では質問を変えて，算数と数学は同じだと思いますか，それとも違うと思いますか．名前が違うというしゃれた答えは今はなしにしましょう．どうでしょう．（挙手してもらう）違うと思う人が少し多いですかね．

僕の考えを言います．僕は算数と数学は同じだと思います．確かに算数

では，さっき嫌いだといった人もいる文字の計算は出てきません．本当は算数で文字を使ってもいいんだけど，教科書にはでてこないです．だけど，どんな勉強でも先に進めばいろいろと難しい内容になっていくのは当たり前で，国語だって，小学生の時はまずひらがなから始まって，だんだんと難しい漢字や文章を学んでいくでしょう．算数（数学）も同じことで，まずものの個数を数える1,2,3という数字から始まって，足し算，かけ算，それに半端を測る小数や分数の計算とだんだん難しくなっていきます．そして中学になると文字の計算やマイナスの数を勉強します．ああ，方程式というのも勉強しますね．だから，数学になると急に難しくなるような気がするのかもしれませんけれど，それは一つながりになって数学という学問をつくっているもので，算数が数学になって別の勉強に変わってしまったわけではないと思います．国語みたいに小学校でも中学校でも名前が変わらなければ，一つながりという感じがはっきるするのでしょうね．

ところで，算数では勉強しなかったのに数学では勉強することになるものはたくさんあります．たとえばマイナスの数，文字式，方程式あるいは１次関数などです．その中の１つに，「証明」があります．証明，１年生の人はまだ勉強していないですね．証明という言葉は聞いていないと思います．あっ，自分で勉強して名前は知っているという人もいるかも知れませんね．２年生はちょうど今頃から，図形の勉強のなかで証明というのを学ぶと思います．２年生の使う数学教科書の後ろの「数学の森」には「証明とは」という解説があるはずです．この学校で使っている教科書は，僕も参加して書いているので知っているのです．自分の書いた教科書を皆さんが使っているというのは，とても嬉しいことですが，ちょっと恥ずかしい気もするものです．ところで，３年生は証明とは何か，もうよく知っているでしょう．じつは証明が嫌いだという中学生は案外多いのです．でも証明ってなんでしょうか．算数では本当に証明は出てこなかったのでしょうか．

確かに証明という言葉は算数には出てきませんでした．でもたとえばこんな問題を考えてみましょうか．これは小学校６年生の教科書から選んだ問題です．

長さが90mで時速108kmで走っている電車があります．この電車が鉄橋に入ってから通り過ぎるのに，７秒かかりました．この鉄橋の長さは何mですか．(たのしい算数６年上　大日本図書)
答　120m

皆さんはこういう問題を普通に解いてきたと思いますが，たとえば，学校の先生が「この鉄橋の長さは120mだよ」といったとします．それを皆さんは納得しますか？あるいは答えだけが教科書に載っていたとして，それを皆さんはすぐに納得していいのでしょうか．

この世の中は様々な出来事，事柄から成り立っています．それらの事柄の中には正しいこともあるし，間違っていることもあるでしょう．ところで，正しいことの中には「正しいことが理屈で説明できること」と「正しいけれど，理屈では説明できないこと」があると僕は思います．たとえば僕は「人は人を殺してはいけない」ということは正しいことだと思います．しかし，それがどうして正しいのかといわれても，すべての人を納得させるような答えは残念ながら僕には考え出せません．「悲しむ人がいるから」「法律で罰せられるから」「怖いから」「人には生きる権利があり，誰もそれを犯すことはできないから」などいろいろな理由を考えることはできます．でもそれは，なぜ人が人を殺してはいけないのかを説明する理屈とは少し違うんじゃないかと僕は思います．「悲しむ人がいるから」人は人を殺してはいけない．それでは，悲しむ人がいなければ，人は人を殺してもいいのか，やはり，これだけでは理屈による説明にはならないようですね．それでも僕は「人が人を殺してはいけない」というのは正しいと考えます．たとえ悲しむ人が一人もいなくても，人は人を殺してはいけないのです．

ところで，数学は正しいことを研究する学問ですが，それは「正しいことが人に説明できること」だけを選んで研究する学問なのです．数学は「この世界で，正しいことが人にきちんと説明できることにはどんなことがあるのだろうか」また「その正しいことの説明の仕方にはどんな方法があるのだろうか」ということをずっと研究してきました．正しいことの説明の仕方のことを数学では「証明」といいます．結局，証明とはある事柄が正しいことを他の人に説得力を持って伝える説明に他なりません．数学では説明のことを証明というのです．説得力を持ってということに注意して下さい．数学の説明では，それを聞いた人が誰でもなるほどと思ってくれることが大切なのです．

では説明されると正しいことが分かることにはどんなことがあるのでしょう．さっき例として示した電車と鉄橋の長さの問題では，答えは「鉄橋の長さは120m」でした．これはきちんと説明されると小学生でも分かることで，皆さんも説明されれば納得できるはずです．だから，この問題でも，答えはいくつかと聞いているのですが，単に答えが求まればいいわけではなく，その答えが正しいことの説明が必要なのです．つまりそこには説明があり，数学的にいうと，証明が出てきているのです．あるいは，平行四辺形の対角線はお互いに相手を2等分していますが，これも説明されれば納得できることです．説明もそんなに難しくはありませんね．もう少し難しい問題を考えてみましょうか．たとえば，素数（自分自身と1以外では割り切れない自然数です）は無限にたくさんあるでしょうか．これは確かめようとしても，そう簡単には確かめられそうにない，何しろ無限にあるらしいのですからどうやったらいいのか迷います．ところが，いまから2000年以上も昔に，素数が無限にあることの納得できる説明が考えられていました．人が考えるというのはやはり大したものだと思います．この説明の仕方については後で少し触れましょう．あるいは，3年生の皆さんはピタゴラスの定理（三平方の定理）を学ぶはずですが，もう学びましたか？これも，とても綺麗な美しい事実です．こ

れは直角三角形の斜辺の上につくった正方形の面積は，直角を挟む2辺の上につくった正方形の面積の和に等しいという事実で，どうしてそうなるのかがきちんと説明できることなのです．数学はこうして，何千年も昔から，説明されれば納得できる事実をたくさん集めて研究してきました．そのために考え出された説明方法が証明なのです．ですから，証明という言葉を知らなくても，皆さんは小学生の時から，答えを納得してもらう方法として証明とつき合ってきたといえるのです．

ちょっと余談．群馬県はたくさんの詩人を生んでいますが，皆さん，名前を知っている詩人がいますか？萩原恭次郎，大手拓二，岡田刀水士などですが，その中でもひときわ偉大な詩人が萩原朔太郎です．萩原朔太郎，知っていますか？(残念ながら中学生には意外に知られていませんでした)．皆さんきっといまにその名前にどこかで出会うと思います．日本の近代詩をつくった詩人です．前橋市にはたくさん朔太郎の詩碑が建っていますし，萩原朔太郎賞という詩の賞もあります．現代詩人の入澤康夫という方が今年の受賞者です．

ところでその萩原朔太郎は処女詩集「月に吠える」（狼みたいですね）の序文でこんなことを書いています．

「どういうわけで嬉しいという質問に対しては人は容易にその理由を説明することができる．けれどもどういう具合に嬉しいという問いに対しては，何人もたやすくその心理を説明することはできない.」

朔太郎はこの言葉に続けて，そんなとき，人は他人に自分の感情を伝達する手段として，詩と音楽しかもたないといいました．個人的な話になりますが，僕と一緒に暮らしていた猫が今年21歳で死にました．人でいうと100歳以上だそうです．とても悲しかった．こんな時，どうして悲しいのと聞かれれば，かわいがっていた猫が死んだから，と答えられます．しかし，どんな風に悲しいか，と聞かれても，確かに説明に困ります．でもとても悲しいことは事実です.（正しい事柄です)．でもどうして

も理屈では説明できません．

数学の説明（証明）はこういう事実に対しては無力です．それは数学という学問の守備範囲外なのです．しかし，正しいことがきちんと説明できる事柄については，数学は他のどんな学問より一生懸命に研究してきました．

説明できる事実で，皆さんが興味を持ちそうなことをもう少し挙げておきましょう．

- 角の三等分問題
- ４色問題
- 代数学の基本定理
- 同相問題
- 結び目問題

普通の角，たとえば６０度という角をコンパスと定規で三等分することはできません．これを角の三等分問題といい，ギリシア時代からの大問題でした．19 世紀になりやっと証明ができました．特別の角，たとえば９０度などはコンパスと定規で三等分できます．

どんな地図でも４色で塗り分けることができます．これは四色問題という難問でした．つい最近，1976 年（長い数学の歴史から見ると，1976 年なんて昨日のことですよ）コンピュータを使って証明ができました．

皆さんは中学時代に１次方程式と２次方程式の解き方を学びます．１次方程式はまあ，そんなに難しくなく解けます．２次方程式の答えを求めることは，そんなに易しくはありませんが，人は今から何千年も昔に，もう２次方程式の解き方を見つけていました．それを解の公式といいます．とても残念なことに，２次方程式の解の公式そのものは，中学校では学ばなくても良くなってしまいました．でも，２次方程式の解の公式はこれか

らの数学の考え方の基礎の 1 つです．この公式から人はずいぶんいろいろなことを発見しました．皆さんはぜひ教科書以外の数学の本でその考えを勉強して下さい．実はどんな方程式でも必ず答えを持ちます．これを代数学の基本定理といいます．詳しく説明しようとすると少し難しいので，興味がある人は自分で調べて下さい．これはガウスという 19 世紀の偉大な数学者が証明しました．彼はこの証明に誇りを持っていて，何通りもの説明の仕方を考えたのです．すごいでしょう．それから，ガウスは正 17 角形がコンパスと定規で作図できることの説明も発見しました．

切ったり貼ったりしないで浮き袋を球面にかえることはできません．少し難しい言葉で，トーラスと球面は同相でないといいます．これはトポロジーという数学を使って証明できます．でも直感的には当たり前みたいですね．

あるいは輪ゴムを切ったりしないで結ぶことはできません．これも直感的には当たり前みたいですね．でもどうして当たり前なのかを数学は研究してきたのでした．この数学を結び目理論といいます．皆さんが今勉強している数学の他に，こんな結び目のようなものの研究も「正しいことが説明できること」として数学の分野に入っているのですね．

これらはすべて説明できる事実で，数学はその説明に成功しました．ここでその説明について詳しい解説をする事はできないので，（余白が狭すぎる，というと，数学に詳しい人はニヤッとするかも知れませんね）説明はしません．この会場の皆さんの中に，後に大学で本格的に数学の勉強をする人が出てくれれば，必ずその説明を学ぶと思います．

正しい事実のなかには簡単に説明ができそうなのに，きちんと考えると大変に難しいということもたくさんあります．ちょっと難しいけれど，三年生向けに，ピタゴラスの定理に関係した話をします．1,2 年生は少し我慢して下さい．

数 3,4,5 について $3^2+4^2=5^2$ が成り立つことは計算してみるとわかります．これは直角三角形の 3 辺の長さになっているのですね．こういう数

は他にもいろいろとあります．たとえば，$5^2+12^2=13^2$ もそうです．こういう数が無限にたくさんあることも分かっています．では，

$$x^3+y^3=z^3$$

となるような自然数 x, y, z があるでしょうか．もっと広げて，

$$x^n+y^n=z^n$$

となるような自然数 x, y, z があるでしょうか．これは17世紀の数学者フェルマーという人が考えた問題で，彼は「そういう数はないのだ」といいました．それにちなんで，この問題をフェルマーの問題といいます．ところが，フェルマーはそういう数はないのだといったのに，その説明（証明）をどこにも書かなかったのです．数学ではどんな事実でも，証明なしには信用されません．こうして，この問題は説明のないままに問題として残ったのです．こういう数があるかないかは説明されれば分かるはずの問題ですが，それから何百年も誰もその説明に成功しませでした．ところが20世紀も終わりかけた1996年にとうとうワイルスという数学者がその証明に成功したのです．数学の問題の中には，こんな具合に何百年もかけて説明されることもあるのです．人間の文化の厚さを感じませんか．人が何百年も同じ問題を考え続けることができるなんて，素晴らしいことだと僕は思います．

話が少し難しくなってしまいました．もう少し易しい，中学生でも分かることなら，三角形の内角の和は180度である，という事実もあります．これは小学生の時も説明してきたのですが，覚えていますか？(会場から,「測って調べた，切って並べたら一直線になった」との解答がありました）．そうですね，それも説明の1つです．だけど測ってみたら180度になったけれど，正確に計ったかどうかはどうすれば分かるのでしょうか．もしかしたら180.1度とか，179.9度かも知れませんね．そんなとき，どう説明すればいいのでしょうか．

そんなときのために，数学は説明のためのルールを決めたのです．こうして数学での説明，つまり証明ができあがりました．そのルールの基本的な部分は，今から2000年以上も前のギリシア時代にユークリッドという数学者がまとめた本に出てきます．その本の名前は「原論」といい，数学の本の中ではもっとも有名なものの１つです．聖書についで世界中で読まれた本ともいわれています．

そのルールを少し説明しましょう．いま,「どうしてそうなるのか」という疑問をどんどん遡っていくと，そのうちに別の言葉では説明ができない，もっとも基本的な事柄にたどり着きます．それは大勢の人が正しいと認めている事実といってもいいでしょう．そこで，数学では，これだけのことは皆が正しいと認めることにしよう，そして，そこから出発して説明できる事柄を探していこう，と決めたのです．この最初の約束は「もう，それは説明するのはよそうよ．正しいよ」ということを集めたものです．これを数学用語で公理といいます．結局数学の証明はいくつかの公理から出発して，それから分かることを順番に積み上げてできています．数学のこういう性格が論理的といわれる理由です．

そういう論理の積み重ねの中には，こんな証明もあります．さっき話した素数が無限にあるかどうかという問題を考えましょう．無限にあることをどうやって証明したらいいのでしょうか．１つ１つの素数を順番に示していたのでは日が暮れてしまいます．いや，もちろん，日が暮れても無限にあるものを全部指し示すことはできないでしょうね．こんな時数学が考え出した説明の方法があります．それを紹介しましょう．それは，たとえば「素数が10000個しかなかったとするとおかしなことになる」ということを示す方法です．何々だと考えるとおかしなことになってしまう．だから何々だというのは間違いで，こうなるのだ．この考え方を数学では背理法と呼んでいます．これはとても大切な数学の考え方の１つで，普通の生活の中でも活躍する考え方の１つです．皆さんが何か疑問に思うことが出てきたとき，もしそれが本当だったら，こんなこと

もあんなことも起きているはずだ，でもそんなことは起きていない，だからそれは本当ではないのではないか，こう考えることが背理法の考え方で，世の中には背理法の考えで分かることもたくさんあると思います．

数学の証明の出発点になる公理の話をもう少し続けましょう．さっき挙げたユークリッドの本は，こんな説明から始まります．

点とは部分をもたないものである．

直線とはその上の点について一様に横たわる線である．

なんだかよく分かりませんか？ちょっと辛抱して下さい．こんな説明が続いた後に，ユークリッドは公理として次の５つを挙げました．

1　２点を通る直線を書くことができる

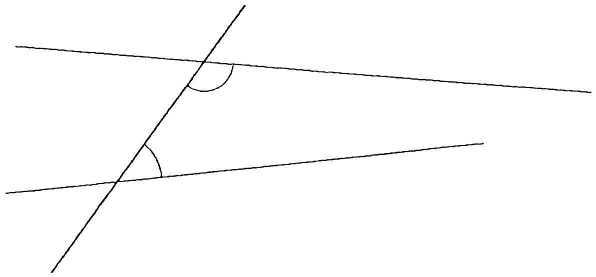
2　直線はどこまでも伸ばすことができる

3　好きな点を中心として好きな半径の円を書くことができる

4　直角はみんな等しい

5　１つの直線に交わる２本の直線があり，その２つの内角を足したものが180度より小さければ，この２本の直線は交わる

最後の公理を平行線の公理といいます．ちょっと分かり難いので，図を書きます．



ユークリッドはこの５つの公理を出発点として，だんだんと図形の性質を調べていったのです．だけど，最後の公理はちょっと分かり難いですね．これをもう少し分かりやすく言い直したのが次の公理です．

直線の外にある１つの点を通って，その直線に平行な直線はちょうど１本だけある

皆さんは三角定規を使ってこのことが正しいということを確かめることができます．ところが，この事実は，三角定規を使わないで，説明だけで正しいということを確かめようとしても，うまく説明できないのです．これがうまく説明できないということが分かったのは19世紀になってからでした．それで，普通はこれを説明せずに済ませているのです．このあたりの話は数学の歴史の話としてとても面白いのですが，１年生にはすこし難しいかなと思いますので，これくらいで終わりにします．２年生，３年生の皆さんはぜひ機会をみて，平行線の公理についての数学の歴史を調べてみて下さい．たぶんＳＦの世界より面白いのではないかと，僕は思います．楽しみにね．

話が少し難しくなってきたので，ちょっと話題を変えましょう．１年生も累乗というのを勉強しましたね．たとえば

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

のことを3^4と書いて「３の４乗」と読みます．３を４回かけることです．もちろん81になります．では

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$$

を順番に計算して下さい．

ちょっと白板に書いてみます．

$$3, 9, 27, 81, 243$$

ですね．最後の数字だけみると，$3, 9, 7, 1, 3$になっています．

では質問．３の累乗で最後の数字が２になることはあるでしょうか．どうですか．(会場からならないという答えがあった)

なりませんか．じゃ，どうして2にならないのか説明して下さい．これは説明されると分かることです．うまく説明できませんか？うん，これは難しくはありません．1年生でもよく考えると，最後が2にならない理由が分かると思います．自分で考えてみて下さい．

ところで，3の累乗の計算で最後が1になることはありましたね．3^4 がそうでした．

では質問．3の累乗で最後が01になることはあるでしょうか？ちょっと試してみても，なかなか難しいです．僕はコンピュータを使って確かめてみました．実は

$$3^{40} = 12157665459056928801$$

となって，確かに最後が01になります．40乗ではとても手計算で確かめる気は起きないでしょうね．コンピュータが使える人は自分で確かめてみると面白いです．でも，この質問はもっともっと続けることができます．

質問　3の累乗で最後が001となることはあるでしょうか？

今度はもっと大変です．これもコンピュータで確かめてみました．昔ならとても無理でした．コンピュータの力はすごいです．

$$3^{100} = 515377520732011331036461129765621272702107522001$$

となって，確かに終わりが001です．

終わりが0001となるものもあることが分かります．あまり長くなるので，全部は書きませんが，3^{1000} は0001で終わります．ちょっと断っておくと，3の10乗は $3^{10} = 59049$ で01では終わりません．

では，最後に0が100個並んで一番最後の数が1となる，つまり $\cdots 000 \cdots 0001$ となるような3の累乗があるでしょうか．こうなるとコンピュータでも確かめることはできなくなってしまいますが，実は驚いたことに，確かにそうなるような3の累乗があるのです．この0の並びは何個でもかまわ

ないのです．0 が 100 個でも 1000 個でも 100000 個でも並んで最後が 1 で終わる 3 の累乗が必ずあります．

これは説明できる事実です．こんなことをコンピュータを使わずにどうやって説明するのでしょうね．じつはこの事実の証明は皆さんが考えているほどには難しくありません．高校生ならきっとその説明が理解できると思います．もしかしたら，中学生でもゆっくりとしっかりと考えると分かるかもしれません．でもここでは残念ながらその説明はしません．興味がある人はぜひ考えて下さい．$3^{40}-1$ が 10 で割り切れる，あるいは $3^{100}-1$ が 1000 で割り切れるというのがヒントです．

さて，最後にもう一度証明についてお話しします．

この世の中にある説明できる事実を見つけ，その説明の仕方を考える，これが数学という学問の役目です．説明の仕方をきちんと見つけ，説明を付けることで，たくさんの事実がたくさんの人に納得してもらえます．あるいは説明の仕方を考える癖をつけることで，世の中で何となく信用されてしまっていることが，実はあまり根拠のないことだということを見つけることができるようにもなります．数学はそういう態度も養うという大きな目的があるのです．

確かに数学を学ぶと計算ができるようになり，日常生活の役にも立ちます．小学生が初めて引き算を学べば，1000 円持って買い物に行き，650 円の品物を買えばお釣りが 350 円だということが分かるようになります．でも証明なんてちょっと考えると，買い物をする役には立たないような気がしますね．ある高校生が「カボチャ買うのに数学はいらない」と言ったという話が伝わっています．確かにカボチャを買うのに数学はいらないかも知れません．でも，そんなことを言ったら，カボチャを買うのに世界の歴史を知っている必要もない，あるいはすてきな音楽も詩も必要がないと言うことになってしまいます．数学でいろいろなことを学ぶ，証明という考え方を学ぶのはカボチャを買うためではないのです．（もしかしたら，カボチャを買う役にも立つかも知れませんが）そうではなくて，こ

の世界で説明できることはきちんと説明して納得しようという態度，また，自分で納得できないことは，そのままでは信用しないこと，納得できるまで自分で考えること，こういう考え方を学ぶのに数学は大変に役立っているのです．

さっき3の累乗の話をしました．ではこんな問題はどうでしょう．1人の人が常に2人の人を紹介し，紹介された2人の人は，それぞれまた2人の人を紹介していく．こんな具合に人を紹介し続けて50回紹介が続くと，紹介される人は皆で何人になるでしょうか．これは2^{50}の計算と同じです．

$$2^{50} = 1125899906842624$$

ですから50回目には紹介される人は1125兆8999億684万2624人になります．ところで，2002年現在，世界の人口は約60億人です．なんのことはない，この倍々ゲームはあっという間に世界人口を超えて続けられなくなってしまいます．これが何の話かおわかりですね．そう，ねずみ講の話です．ちょっと数学の知識があるだけで，ねずみ講に引っかかる人はいなくなるはずです．

さて，いろいろとお話をしてきました．少し難しそうな部分もあったかなあと思いますが，熱心に聞いてくれて有り難う．最後に，数学ってとても面白い学問です．僕が数学を勉強しようと思ったのも，数学が面白かったからです．皆さんもぜひ，数学の面白さを，試験や入試などから開放されて味わって下さい．そのための中学生でも読める面白い数学の本もたくさん出版されています．この中から本格的に数学を勉強する人がでてくればこんなに嬉しいことはありません．今日はどうもありがとう．

(せやましろう, 群馬大学教育学部)