

虹に見える漸近解析

真島 秀行

まえがき

平成 13 (2001) 年 12 月 24 日 14 時—16 時に講演を行った「湘南現代数学入門市民講座」の状況および内容について以下に報告する。

6 月末に学術委員会委員の小島定吉氏から依頼を受け、2001 年は過剰虹の発生原理を波動光学で説明し、今日エアリー関数とよばれる積分で定義される関数を導入したエアリーの生誕 200 年 (誕生日は 1801 年 7 月 27 日) に当ることもあり、「虹の数学」の話をさせていただくことにした。

以前に書いた原稿を編集して A4 二段組 6 ページの講演要旨を作成し配布した。また、A4 サイズの人工虹スクリーンを作成しておき配布し人工虹を見てもらった。小島定吉氏にはこの件でも財政的援助を受けたので、ここに記し感謝の意を表しておく。

講演は、2 台のパソコンを使いプロジェクターで原稿を見せながらおこなったが、虹の写真など絵を多く見せ数式はあまり入れなかった。これは受入れ易くしたかったのと、式を多く書くと難しい印象を持たれる危険があると考えたからである。

参加者 120 名程で、講演後の「現代数学入門市民講座アンケート」の回収数は 81 名分であった。聴衆の年齢幅は小学生から 70 才代までと広く、また数学的基礎知識の面から見てもまったくの素人から専門家までと広がったが、内容が面白いとした方が 40 名、普通 38 名、つまらなかった 1 名という結果だったので、まず成功と思われる。

講演初めの 1 時間ほどは数式を出さず、その後の 30 分でもあまり数式を入れなかったが、この本文では入れる。しかし、カラーではないので写真等はかなり割愛する。

0. はじめに

虹というのは昔から人々の関心を引いてきた自然現象で、民族学者の大林太良氏がまとめた分厚い資料集的な本「銀河の道 虹の架け橋」（小学館）などが出版されたり、小説の題名や歌詞、俳句、短歌の中にもかなり出ており、文系的にも十分に興味の対象となっているが、ここでは理系的な興味で説明したい。特に、虹を数学的観点から見て、数学との関連を話し、特に漸近解析という数学にどうつながって行くかを説明したい。雨粒を球と理想化して考えると自然界の虹は二次曲線として捉えられること、過剰虹という現象がエアリー関数という特殊関数の挙動で捉えられ、それを明らかにするのに行ったエアリー、ストークスの解析が中心的话题である。過剰虹が見えるのはエアリー関数の一方向の挙動が正弦関数的であることによるので、そこから標題を「虹に見える漸近解析」にした。

1. 虹の写真

虹は、雨上がりのときに太陽を背にして見えるものである。雨上がりの虹の写真は新聞の写真展などにもよく掲載されている。（例えば、第57回国際写真サロン展審査委員特別賞「草原の少女」伊藤栄一氏撮影など。）次の写真は、ロンドンで筆者が撮影したものである。

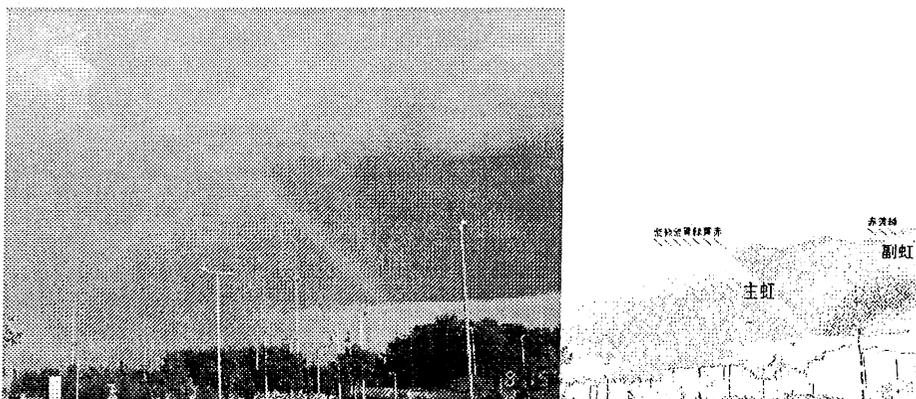


写真1 主虹、副虹、過剰虹が見えている。

〔市民講座当日は、この写真の後、2001年10月—2002年3月のNHK連続テレビ小説「ほんまもん」の最後の出演者とともに出ていた虹、大学

の同僚である松崎克彦氏が京都で撮影した虹，カレンダーに掲載された雄大な虹なども見せた.]

雨上がりでなくても，滝など水しぶきが舞い上がっているところ，散水しているとき，草に朝露が一面に乗っているときなどにも見える．〔市民講座当日は，Netscape 世界のフォト・ニュース 2001 年 8 月 1 日よりアルゼンチン・イグアスの滝で見た虹 (Reuters/Gregg Newton)，朝日新聞夕刊に掲載された韓国のワールド・カップ開催会場前の噴水で見た虹なども紹介した.〕

さらに，人工虹スクリーンを使っても見える．これは内川英雄氏（元鳥取大学），浜崎修氏（鳥取大学附属中学校）らによって 20 年程前に開発され 1998 年から市販されている「虹ビーズ」「虹シート」から容易に製作できる．写真 2 は，人工虹スクリーンに太陽光を当てて出現させた虹の写真である．

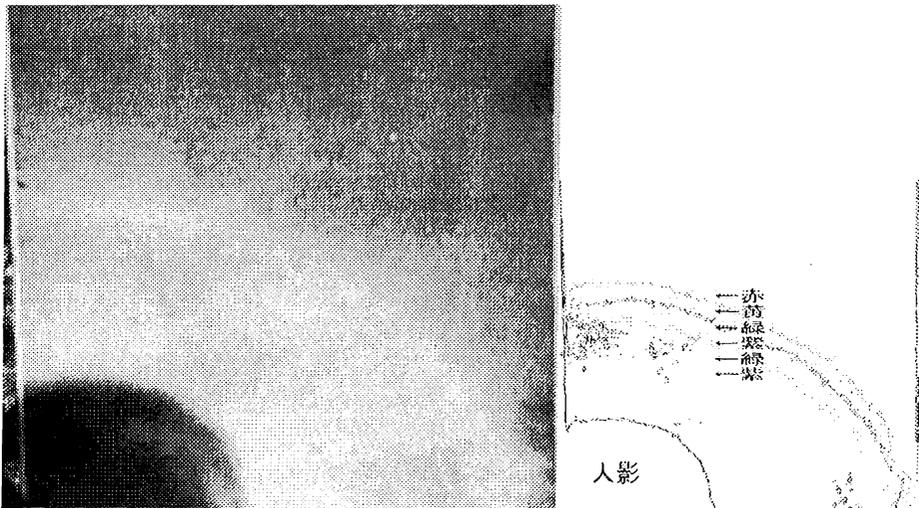


写真 2 人工虹スクリーンに太陽光を当て著者撮影

写真 1, 2 を観察すると，虹のいろいろな様相が見える．すなわち，主虹の色，形，位置，副虹，（アレクサンダー）暗帯，過剰虹などが見える．主虹は外側から内側に赤，橙，黄，緑，青，藍，虹が比較的是っきりと見えているもの，その外側に暗帯，さらにその外側にうすく副虹が見える．

副虹の色の配列は主虹の逆になっている。主虹の内側に過剰虹も見えている。副虹の外側にも過剰虹が見える可能性があるが写真では見えていない。写真 2 では暗帯ははっきりしているが副虹は見えていない。〔以上のことはここに掲載された写真がカラーではないので濃淡しかわからないであろうが、カラーならばわかることである。写真の右横に輪郭を描き、虹の見えている位置と見えている大体の色を示した図を配置しておいたので参考にして欲しい。〕

2. 虹の科学的研究小史

虹を自然科学的にとらえる試みは、アリストテレス以来らしい。「太陽の反対側にある水滴が鍵である」ことを発見した、その後、グロステストやピテロが「水滴による光の屈折による」と説明し、さらに、ベーコンが「水滴の集まりが鏡のような役割をする」と説明した。ディートリッヒやドミニスが「水滴による光の屈折と反射による」と説明し、そしてデカルトが「光の屈折と反射の原理」を確立し、いわゆるデカルト光（焦線の漸近線方向の光）に注目し、ニュートンが「光の屈折率の違いによる分散」を説明しひとまず完結した。（このとき、ロマン派の人々が虹に対する光学の勝利に詩的感性の死を見た、などと嘆いていたことが、アーサー・サイエンス著、林大訳「光と視覚の科学」（白揚社）やリチャード・ドーキンス著、福岡伸一訳：「虹の解体」（早川書房）に書いてある。）

しかし、「過剰虹」や「雨粒の大きさと虹の関係」などについてはエアリーの仕事を待たねばならなかった。また、過剰虹の研究を完結したのはストークスであり。さらに、カスプ虹などの研究はブリストール大学のベリー等によりなされてきたが、現在でも多次元虹の解析のようなまだ残された問題もある。〔当日の市民講座では、ニュートンの生家にかかった虹の写真を紹介した。出典は、Bishop, Roy L., Rainbow over Woolsthorpe Manor. Notes and Records Roy. Soc. London 36 (1981/82), no. 1, 3-11 (1 plate). この写真では副虹も見え、さらに、ニュートンが説明しえなかった主虹の過剰虹も見えている。〕

3. 幾何光学による虹の説明

雨粒を理想化して球であると考え、太陽光線が完全に平行光線になっていると思って雨粒をどのように通っていくか主虹の場合に図を使って、幾何光学的に説明しよう。

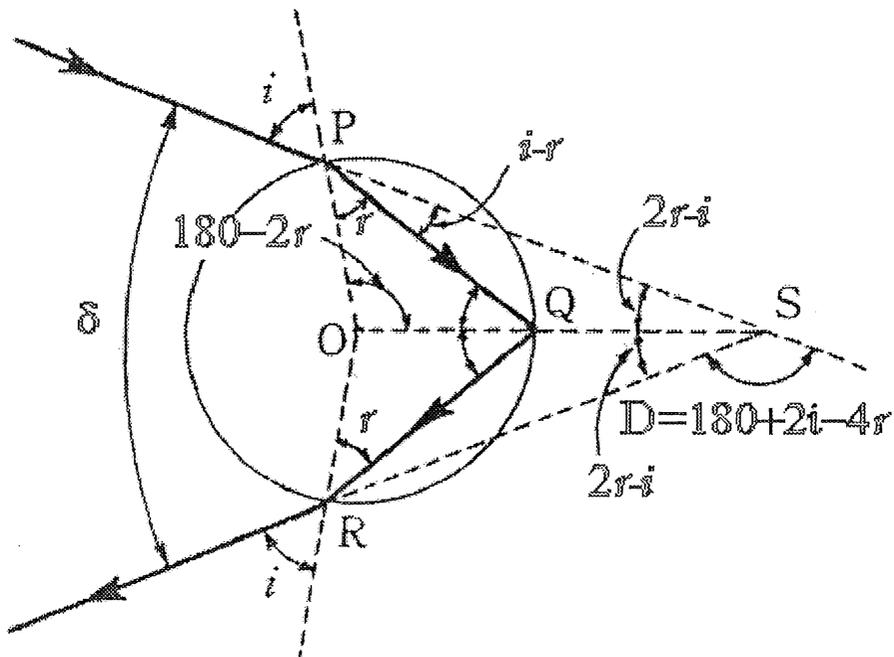


図1 水滴内で1回反射する光路

理想化して1つの光線に注目すると、光線は屈折して空中から、水球（雨粒）中に入ったり出たりする。というのは屈折率が空気と水では違うからであり、スネル・デカルトの法則に従っている。それは「一点から他の点に至る可能な径路のうちで光は最小の時間を要する径路をとる」というフェルマーの原理の反映であり、数学的にはここに、関数の極小の考えが入ってくる。

水球中で反射するところも、やはりフェルマーの原理によるが、数学的には円の性質（接線と弦の関係）も反映している。（図1）

次に水球に入った平行光線の束がどのように出て行くか見てみよう。

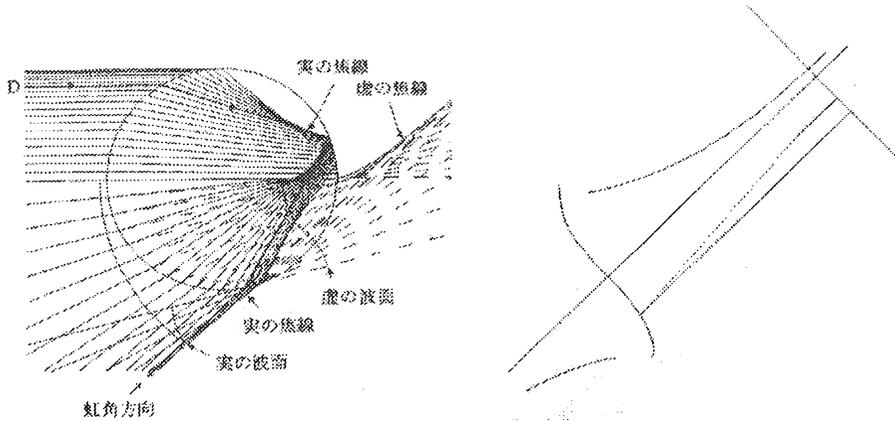


図2 (左) 20本の平行光線の光路, 焦点, 波面,
(右) 特に焦点, 波面と虹角方向

デカルトは8本の平行光線を描いた図を示したが, ここでは, 20本の平行光線を描いた図を示そう. 元々は, 左図は Humphreys, W. J., *Physics of the Air*, McGraw-Hill, 1920, にある. 右図は Airy の 1838 年の論文に出ている. (波面が3次関数のようであることに注目されたい. 5節参照.)

光線群の焦点, 数学的にはすべての光線に対する包絡線の漸近線を考えて, その方向に光線が集まっているのが見て取れる. 入射角 i , 屈折角 r の光線の偏向角 D は

$$D = 180 + 2i - 4r$$

をみたま. 水の屈折率を n とするとき, スネル法則によれば,

$$\sin i = n \sin r$$

という関係式が成り立ち, 従って,

$$D = 180 + 2i - 4 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{\sin i}{n} \right)$$

となるので, 最小偏向角は,

$$\frac{dD}{di} = 2 \left(1 - 2 \frac{dr}{di} \right) = 0$$

をみたまときだから,

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

となる $i = i_{\min}$ に対して最小偏向角になるとし、それに応ずる D を D_{\min} とし、その余角を計算すると、

$$\delta = 180 - D_{\min} = 4 \text{Arcsin} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} - 2 \text{Arcsin} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

となる。最小偏向角となる光線をデカルト光と呼ぶ。

4. 虹曲線は二次曲線

デカルト光線の入射角と出射角との差を虹角というが、光線の色（光線の振動数）により異なり、赤色が $42^\circ 21'$ 、青色が $40^\circ 58'$ などとなっている。従って、分散が起こり、ニュートンが七色としたスペクトルに分解する（実は連続的に変化する）。

さて、一つの水球に注目したとき、焦線の漸近線の集まりは、一つの円錐をなす。

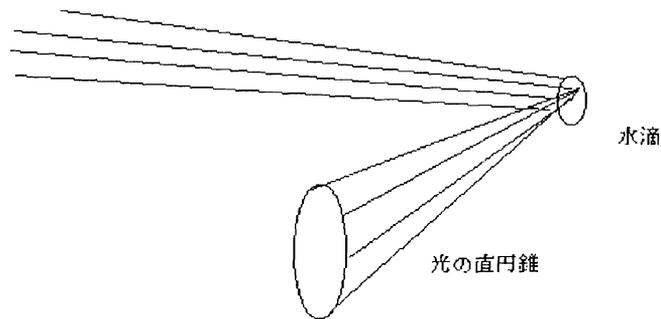


図3 太陽光線が水球に屈折して入射し、1度反射して屈折して出射することによりできる光の円錐

一方、観測者の目を中心に考えると、一つの色の焦線の漸近線は目を頂点とする太陽光と平行な中心軸をもち、それとのなす角が虹角に等しい円錐の母線になることがわかる。すなわち、全体としては円錐を形成してい

る.

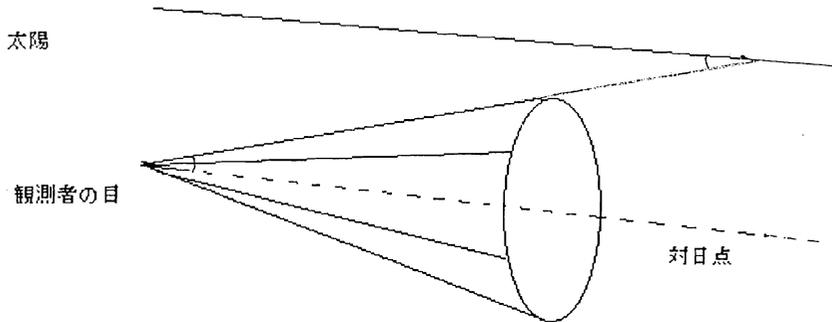


図4 屈折率 n となる色の光が、観測者の目を頂点とし、それを起点にもつ太陽光と平行な線を中心軸とする、中心角が δ の円錐を形成する。

雨上がりのときは眼前に雨粒の層スクリーンができてることになるから、円錐を平面で切った断面の曲線が虹として観測されることになる。すなわち、高校で習う円錐曲線が観測されるのである。通常は、楕円が、まれに、放物線・双曲線の一部が観測者に見える。

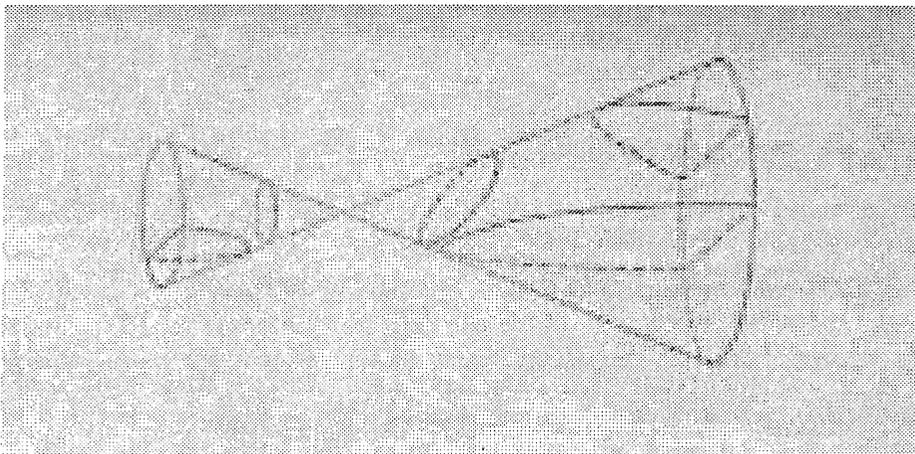


図5 円錐と平面による断面図。楕円，放物線，双曲線になっている。(筆者が使った数学 IIB の教科書 (泉信一・近藤基吉・穂刈四三二共著，日本書院，1969 より)

放物線や双曲線の虹は、牧草地に朝露が降りそこに太陽光が注ぐときに
見えることがあり長谷川眞理子さんがその体験を「科学の目 科学のこ
ろ」(岩波新書 623 (1999))の中に「牧場の地面に降りた虹」と題して書
いている。元々は雑誌『科学』に連載されたエッセイの一つとして書かれ、
この(露虹とか水平虹として知られている)現象の説明を読者に求めたど
ころ、寄稿がいくつかあり、その一つが収録されている。

その説明はおよそ良いのだが、そこに使われている曲線の呼称は、一般
読者を想定して「放物線状」という言葉を用いたそうだが、これは数学的
でない。正しく言うならば、その虹は、(切断面の連続性に注意すると)
すべての色について(軸のととても長い)楕円か、一つの色だけ放物線で他
の色は楕円か双曲線かどちらか、すべての色について双曲線か、のいずれ
かである。都会ではこの種の虹は見られないが、人工虹スクリーンを使え
ば、(虹の全体は見えないが)容易に曲線の変化を見ることができる。

人工虹スクリーンで虹を見るコツは自分の頭の影をスクリーンに映す
ような角度にもつことで、その場合は頭の周りに虹ができる(写真2参照)。
次の写真3の場合はそれより遠ざけてかなり大きな楕円の虹がみえてい
ることになる。

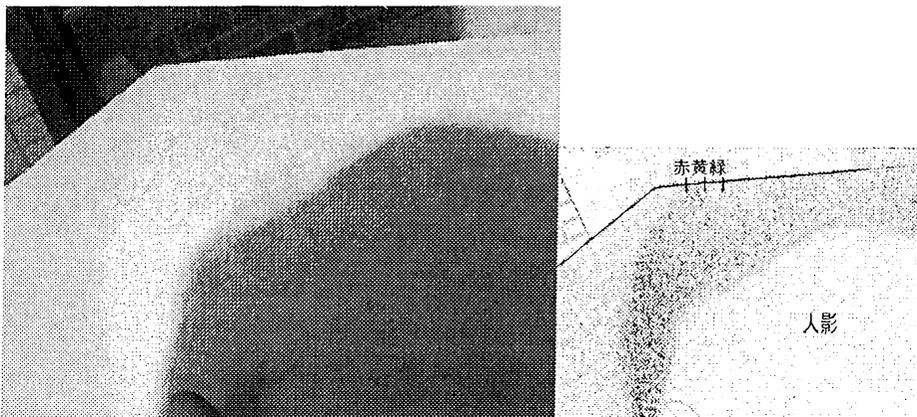


写真3 楕円の虹(筆者撮影)

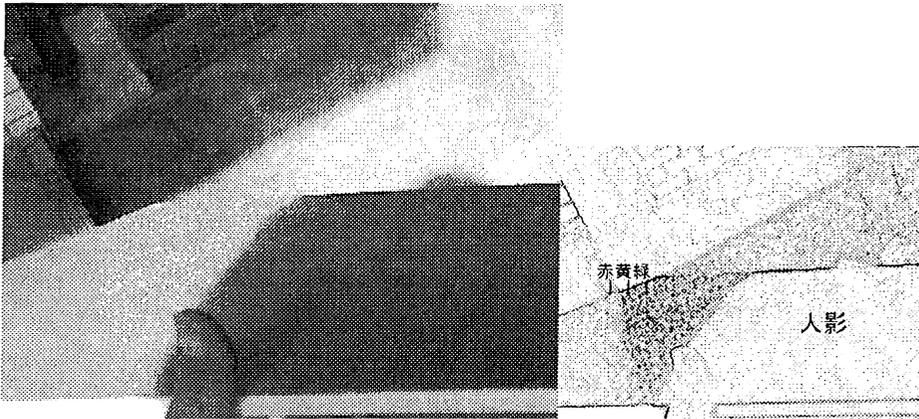


写真4 写真3と5の間 (筆者撮影)

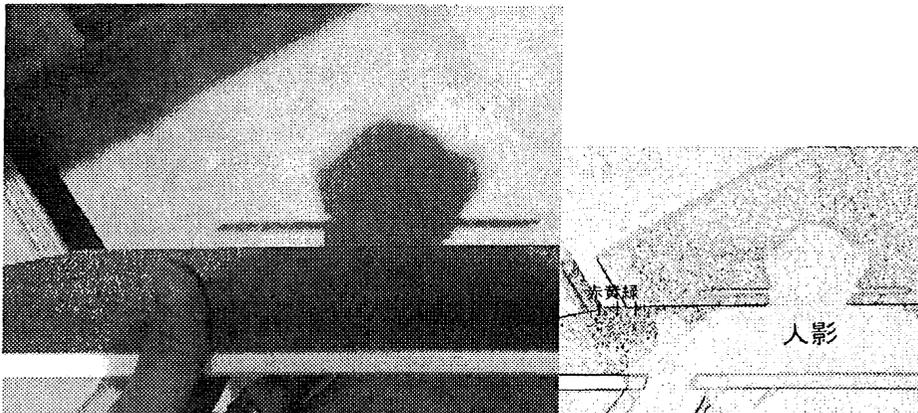


写真5 太陽光線が切断面と平行だから双曲線の虹 (筆者撮影)

〔市民講座当日は、Mathematica で作成した円錐曲線虹をお見せした。〕

色の配列が主虹と逆のものが観測されるが、水球中で光が2回反射してできるものであり、それを副虹という。この場合の虹角は、赤色が $50^{\circ} 25'$ 、青色が $52^{\circ} 48'$ などとなっている。

ところで、焦線といえは、日常よく目にするのは、太陽光が当たったカップの中にできる明暗の境の明るい線である。ネフロイドという名前が付いている。エピ(外)サイクロイドの一種で、一つの円の外側に沿ってその半分の半径の小円が転がるときある1点が描く軌跡である。

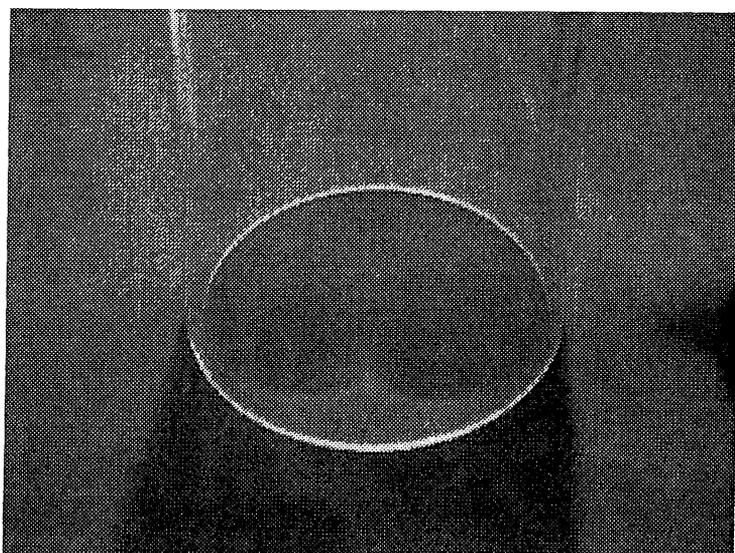


写真 6

なお、カルジオイドは、一つの円の外側に沿ってそれと同じ半径の円が
転がるときある 1 点が描く軌跡でありネフロイドとは少し違う。

6. 人工虹スクリーンによる点光源の虹

人工虹スクリーンを使えば、観測者に近い点光源の虹も観測できる。

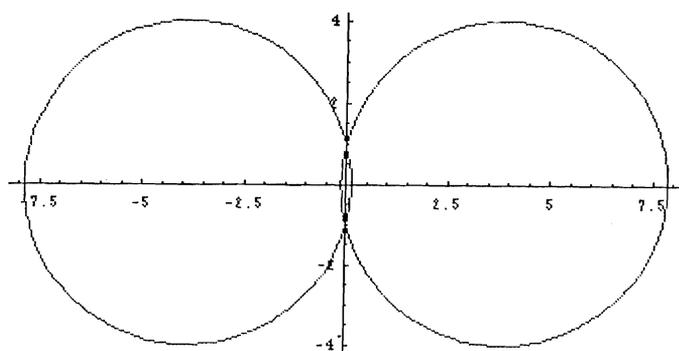


図 6 観測者の目と点光源を結ぶ線分を弦にもつ 2 つの円

この場合は、観測者の目 A と点光源 B を結ぶ線分 AB を弦にもつ角度一
定の点全体の集合、すなわち、円周角一定の円弧(図 6 参照)をその弦を軸

として回転させてえられる曲面，それには名前が付けられていて円環面 (トーラス) というが，それを平面で切って得られる断面の形の虹が見える。(山本明利氏「点光源による人工虹の理論」物理教育通信 84 号(1996)，pp.9-15，右近修治氏「3D 人工虹」同掲書，pp.16-17 を参照.)

ただし，通常のトーラスは，穴の開いたドーナツの表面の形だが，今の場合，穴のないき損ないのドーナツの表面である。

y 軸と垂直で x 軸付近を通る平面， $x y$ 平面に平行な $x y$ 平面付近を通る平面， y 軸に直交しないある平面などで切ると，いくつかの異なる 4 次曲線が現れる (2 つの二次曲線に分解する場合もある)。

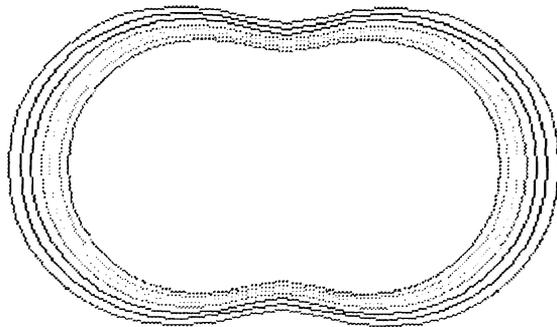


図 7

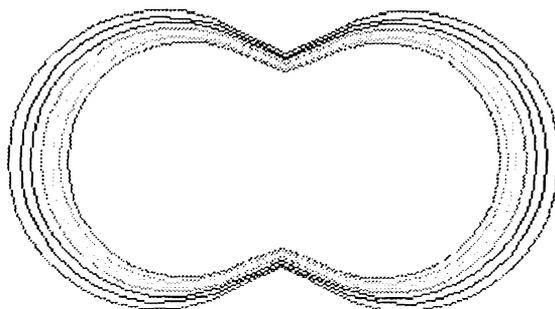


図 8

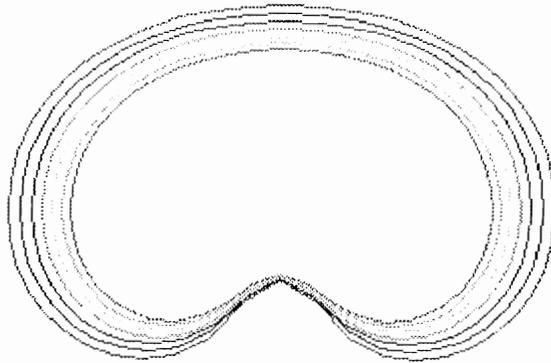


図9

〔市民講座当日は, Mathematica で作成したトーラス断面虹のアニメーションをお見せした.〕

5. 過剰虹の解析

虹の光は偏光しているが, 96%の偏光についてはエアリーの理論によく合っていることが確認されている.

虹の分散した各色の光の波面が3次関数であると近似(仮定)すると振幅はエアリー積分という複素広義積分が表す関数(エアリー関数)

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty e^{-2i\pi/3}}^{\infty e^{+2i\pi/3}} \exp\left(xt - \frac{t^3}{3}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty e^{-i\pi/3}}^{\infty e^{+i\pi/3}} \exp\left(\frac{t^3}{3} - xt\right) dt$$

でほぼ記述され, 光の強さはその関数の絶対値の二乗で記述される.

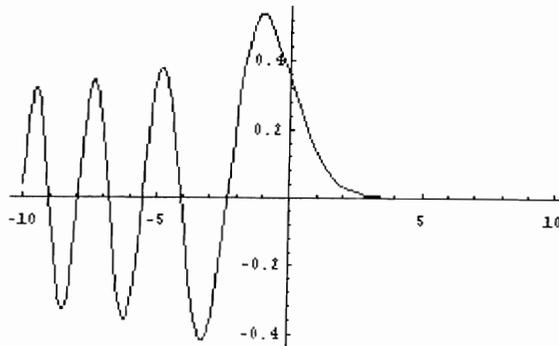


図10 エアリー関数のグラフ

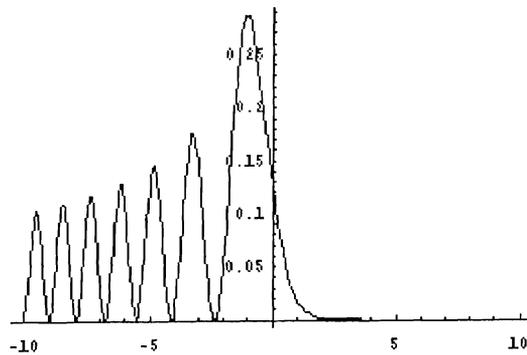


図 1 1 エアリー関数の絶対値の二乗のグラフ

このようないろいろな色 (振動数) の光がそれぞれエアリー関数で表され次のように合わさって虹が見えている。

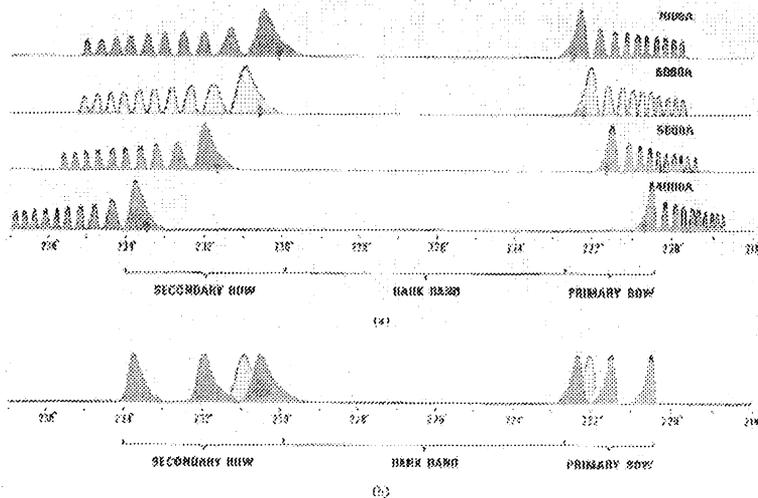


Fig. 21. (a) The patterns of scattered light for several particular wavelengths are shown for a water drop ($r = 1$ mm) viewed from $\theta = 218^\circ$ to 230° when fully illuminated with an ideal white light source. The Cartesian angles θ are indicated for each wavelength by the vertical arrows. The arrangement of the rainbows shown here is also the same if the horizontal axis is relabelled with θ increasing to the right and with 216° replaced by 134° and the other angles relabelled accordingly. (b) The magnitudes of the principal maxima of (a) illustrate the extent of the primary and secondary rain.

図 1 2 いろいろな光がエアリー関数で振幅関数が記述され、その 2 乗がその光の強さを表す。それを重ね合せたもの。(Walker, Jeart D., Multiple rainbows from single drops of water and other liquids, Amer. Jour. of Physics, Vols. 44, No. 5, 1976, pp421-433.の p.431 より)

エアリー関数の挙動は今日では数式処理ソフト（上記グラフは Mathematica で出力させた）が一瞬のうちに教えてくれるが、エアリーの時代は大変な手間であった。エアリーは、元々1838年の論文、On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic by G. D. Airy, Trans. Camb. Phil. Soc. Vol. VI pp378-403 では次の形で関数を定めた。

$$\int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (w^3 - mw) dw \left(= \sqrt[3]{\frac{2}{3\pi}} \pi Ai \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt[3]{\frac{2}{3\pi}} m \right), x = -\frac{\pi}{2} \sqrt[3]{\frac{2}{3\pi}} m \right)$$

区分求積法により近似計算をして m が -4.0 から $+4.0$ までの関数のグラフの概形を（2つの山まで）描いた。その10年後の補遺（Supplement to a Paper “On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic”, Trans. Camb. Phil. Soc. Vol. VIII pp595-599）では、

$$\int_0^{\infty} \cos (s^3 - ys) dt \left(= \sqrt[3]{3}^{-1} \pi Ai (-\sqrt[3]{3}^{-1} y), m = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 y} \right)$$

の $y = 0$ におけるテイラー展開

$$\left\{ \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{y^6}{2 \cdot 3 \cdots 6} - \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{y^9}{2 \cdot 3 \cdots 9} + \cdots \right] \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} \left[y - \frac{2}{3} \cdot \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{y^7}{2 \cdot 3 \cdots 7} - \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{10}}{2 \cdot 3 \cdots 10} + \cdots \right] \right\}$$

をド・モルガンに教わりその第45項まで用いて、 m が -5.6 から $+5.6$ までの範囲で数値計算をして3つの山まで描いている。上のグラフのように x が -10 から $+10$ までの計算しようとするときテイラー展開の80項以上を計算しなくてはならない。その後、ストークスが1850年の論文（On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series, Trans. Camb. Phil. Soc. Vol. IX Part I, pp379-407）でエアリー関数を拡張された複素平面上の無限遠点に不確定特異点をもつ微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}u - zu = 0$$

の解として捉え、その無限遠点における線形独立な二つの形式解

$$\hat{u}_1 = z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(\frac{i}{3z^{\frac{3}{4}}}\right)^{2n},$$

$$\hat{u}_2 = z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(\frac{1}{3z^{\frac{3}{4}}}\right)^{2n}$$

を利用して、複素領域での漸近挙動を計算することにより、 $x > 0$ で指数関数的に減少し、 $x < 0$ では、正弦関数のように振動する、すなわち、

$$\Lambda i(z) \approx \frac{1}{2\pi} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(\frac{i}{3z^{\frac{3}{4}}}\right)^{2n} \quad (|\arg z| < \frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned} \Lambda i(z) \approx & \frac{1}{2\pi} z^{-\frac{1}{4}} \left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(\frac{i}{3z^{\frac{3}{4}}}\right)^{2n} \\ & + \frac{i}{2\pi} z^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(\frac{1}{3z^{\frac{3}{4}}}\right)^{2n} \quad (|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

とくに負軸上で

$$\Lambda i(-x) \approx \frac{1}{\pi} x^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)}{(2n)!} \left(\frac{i}{3x^{\frac{3}{4}}}\right)^{2n} \quad (x > 0)$$

という漸近挙動をもつ関数であることを示し、アレクサンダー暗帯の存在と過剰虹の発生とを説明した。それは同時に、今日ストークス現象といわれることの発見でもあった。

前にカップにできる焦線の図を見たが、実はこのような形の‘虹’もとらえられることができる。カスプ虹とよばれるもので、滑らかな凹凸のあるガラスに懐中電灯の光を絞って当て、シャッターを開いたままで撮影すればよい。技術を習得するのに多少苦勞するが面白い体験ができる、と思う。

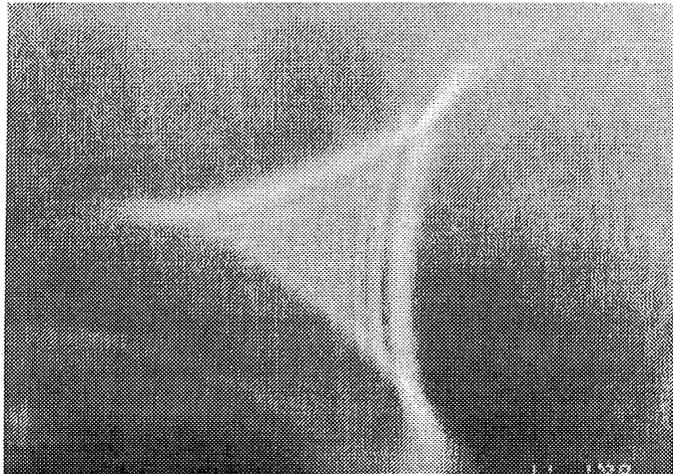


写真7 バルブ撮影したカスプ虹（筆者撮影）

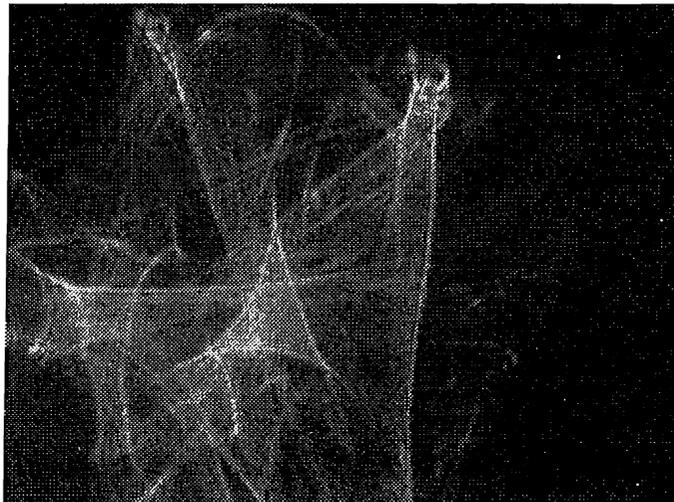


写真8 レーザー光によるいろいろな形（筆者撮影）

形だけ見るなら、少し暗いところにスクリーンを用意し、レーザー光を滑らかな凹凸のあるガラスに通して見ればよい。(写真8)。二十数年前の論文に書いてあるがペリー自身がつい最近の研究集会でも見せてくれた方法である。これは容易に再現できる。

カスプ虹はパーシー積分というもので定義される関数を用いて説明できる。さらに、トムのカタストロフの理論に出てくる初等カタストロフ写像のポテンシャル関数 V が、

$$V = \frac{x^3}{3} + vx \quad (\text{折り目})$$

$$V = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx \quad (\text{くさび})$$

$$V = \frac{x^5}{5} + \frac{u}{3}x^3 + \frac{v}{2}x^2 + wx \quad (\text{つばめの尾})$$

$$V = \frac{y^6}{6} + \frac{t}{4}y^4 + \frac{u}{3}y^3 + \frac{v}{2}y^2 + wy \quad (\text{蝶})$$

$$V = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy \quad (\text{双曲型のへそ})$$

$$V = x^3 - 3xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy \quad (\text{楕円型のへそ})$$

$$V = x^2y + \frac{y^4}{4} + tx^2 + wy^2 - ux - vy \quad (\text{放物型のへそ})$$

となっているときそれを使って書ける積分で定義される関数について同様の現象と理論がある。その一般化の特殊関数論もいろいろな意味でとても面白い。〔市民講座当日は、楕円型のへそや双曲型のへその虹の写真もお見せした。〕

あとがき

アンケートの集計結果を掲載しておく。

問1. セミナーの内容は面白かったですか、

問2. 内容は難しくありませんでしたか。

という3択の回答を求めるものについて以下のようなようだった。

(問1. 面白かった, 問2. 難しかった)

(問1. 面白かった, 問2. 普通)	2 2
(問1. 面白かった, 問2. やさしすぎた)	0
(問1. 普通, 問2. 難しかった)	2 1
(問1. 普通, 問2. 普通)	1 5
(問1. 普通, 問2. やさしすぎた)	1
(問1. つまらなかった, 問2. 難しかった)	2
(問1. つまらなかった, 問2. 普通)	0
(問1. つまらなかった, 問2. やさしすぎた)	0
理解できる範囲では面白かったがともかく難しかった	1
面白かったが, 部分的に難しく大部分は普通	1
内容は普通で, 前半は普通だったが後半は難しかった	1
無回答	2

コメントとして、「この内容についてこの時間ではやってもらえないかもしれぬが何の目的でどう言う研究なのか, 全体像を初めに話してもらえれば, もっと理解しやすかったのではないかと思う」, 「初心者向けのレジユメ, 数式の紹介プリントが欲しかった」, 「数式をもっと印刷資料に入れて欲しかった」ということが寄せられた. これらのコメントを考慮しつつ今回の講演録を書いたつもりだが, 成功しているか分からない.

講演後の質問のうち本文に取り込まなかったものを3つ収録しておく.

問. 新聞に「月虹」が掲載され「稀にしか見えない」とあるがどうしてか.
 答. 夜はあまり人は出歩かないから機会が少ない. 月の光は太陽のより弱く見え難い. 新聞掲載の写真も光を集めるために何時間もバルブ撮影をしたと書いてある.

問. 漸近展開論はポワンカレ (Poincaré) で尽きているのではないのか.
 答. 1 変数関数の一般論としてはある意味でそうだが, 精密な評価付きの漸近展開ジュブレー漸近展開, 総和可能性, 剰余項の精密な評価を伴った漸近展開, 多変数関数の漸近展開など研究され発展している.

問. エアリー方程式の解として $Ai(x)$ は有界であるが, 非有界な解はあるのか.

答. $Bi(x)$ で表される解があり, これは負の方では制限関数的に振動し, 正の方で無限大に発散する. 一般解は $Ai(x)$ と $Bi(x)$ の線形結合 $c Ai(x) + d Bi(x)$ の形で表され, d が零でなければ非有界な解を表す.

参考文献は慣用に従わず, その都度引用したが, 参考としたベリーの論文および筆者関係の以下のものである.

参考文献

[0]Berry, M.: Stokes' Phenomenon: Smoothing a Victorian Discontinuity, Pub. I.H.E.S., 68 (1988), pp211 - 221

[1]真島秀行: 虹にまつわる数学—虹曲線は二次曲線, 日本評論社数学セミナー, 2000年5月号, pp64 - 68 + カラー2ページ; 虹にまつわる数学, 「大学でどのような数学を学ぶのか」(数学セミナー編集部編) 日本評論社, 2002.2, pp.58-68+カラー4ページ

[2]真島秀行: 虹の形, 朝日新聞社 AERAMook No.61, 2000, pp102 - 105

[3]渡辺久子: 虹を題材とした計算機支援教材の研究, 2001.3, お茶の水女子大学大学院博士前期課程数理・情報科学専攻修士論文 (教材用の html ファイルを作成してあり, 虹の形のシミュレーションについてはこれに負う.)

最後になったが, 学術委員会の斎藤政彦委員長, 小島定吉委員をはじめとする委員諸兄および理事会の方々には講演の機会を与えてくださり, ここに謝意を表し御礼申し上げる. また, 湘南国際村センターの方々にもお世話になり感謝している. 講演後に見た夕日に映えた富士山は美しかった.

(まじま ひでゆき, お茶の水女子大学理学部数学科, 同大学院博士前期課程数理・情報科学専攻, 同大学院博士後期課程複合領域科学専攻)