

環境の変化と数学の生命力について

—viva mathies!*

伊原 康隆

0 はじめに

「環境の変化に適応できるものが生残る」 Darwin (—小泉)

しかし今、環境を最も変化させているのは人類で、最も心配すべきは自滅ではないのでしょうか？

人類の自然環境への関わりは、

自然を恐れる → 少しづつ知る → 使う道具や行動範囲が拡大
→ 「征服」が進む → 行過ぎ?!

の順に進んで来ていると思います。

「行過ぎ」によって人はもはや「自然の子」ではなくなり、自然への関心、興味が全体的に薄れています。新しい便利な道具を、人は色々使えるようになりました。しかし、多くの場合それは代償を伴っています。折角生き物として元々授かっていた様々な高度な感覚や能力の方が、気付かぬうち徐々に鈍化退化してしまうという代償を！道具への心理的依存度が度を越すと、失われるものは更にかげがえのないものになります。それは自

*2001年10月5日「日本数学会秋季総合分科会」企画特別講演の内容をもとに多少の修正をしたものです。

己の「内なる声」を静かに聴きとる能力や、孤独に堪える能力をも含んでいるでしょう。このように、自然界からも内面からも美しい調和の感覚を感じとれる機会がとみに少くなっている現代社会です。

人と自然が共存していた時代、開拓は「男のロマン」でした。そして今、「ロマン」の重点は人間同士の競争に移って過当競争を生んでいます。行過ぎた開発と過当競争は密接な因果関係で結ばれていると思います。

少し前から問題になっている子供達の「理科離れ」の原因も、「自然離れ」に加えて、少くも一部の子供達がこの行過ぎを自ら感じとり、その基礎である理系科目の目指しているものに対し疑問を持ちはじめている、という点にもあると思います¹。技術開発も、一方向に進められるだけ進めればよいというものではない。最近、むしろ若い世代にこの思いが強いようです。我々の世代は、振り子が一方向に大きく振れている時期に育った事もあり、又、勿論人によりますが、時代遅れの刻印を押されたくないという気持や、競争に負けてはいけないという事情も手伝って、ついそのまま突進むのを是認してしまう。いわば、指数関数を実軸上のみで見てしまう！ その結果、次の世代に更に負担がかかる事にならなければ幸いなのですが。勿論、行過ぎを理解しその修正をする事も「理・工」等の重要な役割ですから、理科離れは大変困った事です。

数学に於ては、研究の行過ぎによる実害は論文の氾濫程度で、それ程心配すべき事ではないでしょう。しかし、上に述べた事と数学とのつながりは、少なくとも二方面であると思います。一つは数学の進展にとっても深刻な子供達の理科離れとの関係。もう一つは、開発の行過ぎの原因でも結果でもある過当競争が数学の分野にも持込まれつつあり、それが我々にとって大きな環境の変化になっている、という事です。競争意識そのものは、個々の人間が生きてゆく上で、ある程度は必要不可欠なものと思います。しかし大切なのは、大自然（いわば ∞ の近傍）や自己内面（ O の近傍）か

¹この事は最近の学士会会報 no 834(2002-I) 記事

役重真喜子著「真理の海に漕ぎ出せ」—今、なぜ科学離れか— に具体的根拠と共に明確に指摘されています。

ら感じ学びとる調和の感覚と、競争意識（ベクトルのようなもの）との間のよいバランスが保たれる事ではないでしょうか。数学に於ては、この調和の感覚は「真・善・美」と表現される事が多いし、私も以後これに従いたいと思います。この感覚からこそ夢（ ∞ の近傍）も生じるし、自己確認（ 0 の近傍）も出来、短期競争の弊害から自らを守る事が出来るのかも知れません。

このバランスについて、もう少し突込んで考えてみたいと思います。これは、数学を「文化」と見るか、「情報収集と発信のゲーム」と見るか、の捉え方の間の「社会的バランス」の問題でもあると思います。

恩師に以前「君はよいところと悪いところの差が大きい」と云われた事があります。その後、趣味の分野の個人レッスンの先生からも云われました。数学者の中でも特にバランスの悪い私が、バランスについて論じるのは、単に悪い面を放出しているのでしょうか？

それとも事態は斯程に深刻なののでしょうか？

その御判断は皆様方に仰ぐ事にして、先に進ませていただきます。

1 「真・善・美」ほんの二言三言

数学に於る価値観の根底に「真・善・美」があると思います。ここでは、私なりのその語感の具体像に、少しづつ触れさせていただきます。

「真」という言葉の中には単に論理的に正しいこと、というだけではなく、自然界を厳然と支配している未知の諸法則に対する畏敬の念と、それを少しづつ知ってゆきたいという謙虚で且つ積極的な気持も含まれているのだと思います。ただ、数学では、任意の無矛盾の公理系から出発したのも一つの数学的自然界で、これらも一応平等に扱わなくてははいけません。従って、「真」を考えるときは論理的正確さを中心に考えることにして、何が「最も自然な自然界」かを判断するのは善、美の方に譲ってもよいでしょう。数学では証明の厳密さが必要条件とされますが、その結果、出版された論文の結論がほぼ信頼できるという意味で、科学の他分野に比べて、数

学の場合の信頼度はかなり高いようです。これは学問としての数学の第一の財産でしょう。そしてこれは、投稿してからレフェリーされて出版される迄かなり時間がかかる、という犠牲の上に成立っているのですから、そこを短縮化する試みも、行過ぎると折角今迄築かれてきた大切なものを危くする事になりかねない。

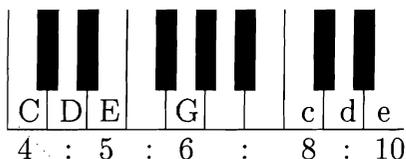
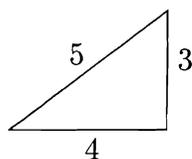
「善」は人と関わっていて、研究成果は人の役に立つのか、数学的思考方法は役に立つのか、「変人数学者」は社会の隠された財産か、いや全く無用の存在か、等いろいろ考えさせる問題を含んでいます。その思考方法ですが、世間ではしばしば「隣人との境界争いで我田引水の理屈をつける」為に論理が用いられるので、論理そのものがうさん臭く思われているようです。しかし、数学者はまず全体構造を把握して、その上で物事を考える素晴らしい思考方法も身につけている。一頃は、民間企業に就職した若者のこういう能力が大いに尊ばれてうれしかったものです。今は、暗号、符号等の応用分野との繋がりの中でアーベル多様体の等分点等、数論幾何の専門用語が飛びかっているのが私には大変印象的です。何十年も先に予期せぬ応用があり得るのも数学のよさの一つでしょう—「先善」??

美の基準の変遷について

数学が独立した学問としての価値を認められたギリシャ時代に遡りましょう。ピタゴラスは「万物は数なり」と言ったと伝えられています。ときどき数学者がこれを過度に強調する事がありますが、数学だけが学問の中心をなしていたわけではありません。「三学四科」の四科は幾何、数論、音楽、天文で成っていたし、ピタゴラスは弦の振動、純正調の音階の研究等で、音楽史にも名を残しています。²

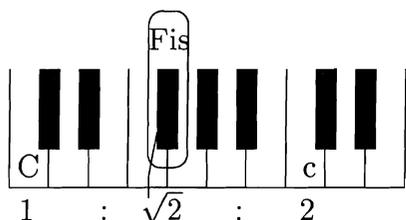
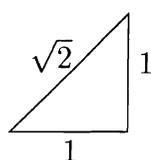
ピタゴラスの「数」は(正の)有理数の事です。彼は美しい有理比が直角三角形の辺の長さの比として、又美しいハーモニーを醸出す和音の振動数の比としても現われる事を知っていました。

²ピタゴラスの音楽史上の業績については、私がお世話になっている合唱団の先生で作曲家の辻敏治氏から教えていただきました。



純正調の
ピアノ
(あったとして)

純正調は1オクターブ、つまり1対2を適当な有理比で12段階に分けたもので、 $3/2$ 、 $4/3$ 等よくハモる和音が沢山含まれています。(美しくハモル理由は、1つの音を出すと通常その整数倍音も少しづつ含まれ、それらが、あまり高くない公倍のところまでぴったり一致するから。)一方、オクターブを等比で12等分する平均律ですと、 $\sqrt{2}$ などの無理比が出てきます。



平均律の
(普通の)
ピアノ

平均律が楽器でよく使われるようになったのは、ずっと後(バッハの頃)です。ピタゴラスの頃の人々は、美しくハモらない比は美しい数ではないと考えたのでしょう。当時の人々は、余計な音の刺激が少いだけ、聴覚も優れていたのでしょうか。又、石の建造物の中の反響のよさもあったでしょう。ピタゴラスが「万物は数なり」と言ったのは、「美しい和音も、数によって表わせる！」という発見に伴う感激の表現だったのではないのでしょうか。尚、美しい音楽の中に美しい数の調和が隠されているとしても、逆に数の研究から美しい音楽が創れるかは、まだ十分わかりませんが。³ いずれにせよ、ピタゴラスは実数全体 \mathbb{R} を積極的にとりあげ、考えることはしなかったようです。

10進法による小数の四則計算は(Algebra, Algorithm等と共に)アラビア人に負うところが極めて大きいと伝えられていますが、これがルネッ

³97年京都賞受賞のクセナキス氏の作曲法など。

サンス時代のイタリアの一部の商人たちに積極的に使われ、実数の概念の下地が出来て来ました。ギリシャ時代から二千年近くも経っています。

因に、 $\sqrt{2}$ が音楽で積極的に使われている例として、ベートーベンの「第九」の第四楽章(合唱付き)があります。皆様の中で歌った事がおありの方も多いのではないでしょうか。後半のダブルフーガの直後のベースの *Ihr stürzt nieder* の中の $\sqrt{2}$ 下降や、*Über Sternen muß er wohnen* のソプラノとテノールの「 $\sqrt{2}$ 和音」など。勿論、平均律で演奏されたと仮定しての話ですが。ベートーベンが「 $\sqrt{2}$ は厳粛な祈りなり」と云ったかどうかは知りませんが、これを聴いて「ア、無理数！」とわかったら凄い！

ベートーベン (1770-1827) の二年前に生まれ約二年遅く亡くなったフーリエ (1768-1830) との関連について。ドミソの和音を純正調で奏でると、倍音もあるので、合成振動関数

$$\sin 4t + \varepsilon_1 \sin 8t + \varepsilon'_1 \sin 12t + \dots \quad (\text{ド})$$

$$+ \sin 5t + \varepsilon_2 \sin 10t + \varepsilon'_2 \sin 15t + \dots \quad (\text{ミ})$$

$$+ \sin 6t + \varepsilon_3 \sin 12t + \varepsilon'_3 \sin 18t + \dots \quad (\text{ソ})$$

が耳に入るわけですが、これから頭で 4:5:6 を判別する、つまりこれがド、ミ、ソの三音から成ることを理解するのは、聴覚神経と脳の働きです。頭で高速に「フーリエ変換」をやっているわけです。こういった事への興味もあってかリーマン全集には、素数分布の論文などと共に、耳の構造に関する遺作 (1860 年代) も載っています。人間の感覚器官の中に潜んでいる「関数変換」等の数学的構造は凄いものです。コンピューターをいくら使っても、自分の体内にある素晴らしいコンピューターを麻痺させたくはないものです。

尚、序文で「多くの場合に道具の使用は人の生来の感覚を鈍らせる」と書きましたが、例外も沢山あります。特に芸術や学問の分野での優れた道具は、人の感覚を更に鋭く分化させて来ています。よい楽器はその好例ですが、数学に於る「道具」の発達も、素朴な感覚からいわば「ダブル・クリック」して開ける、より抽象的な世界での調和美を感じとらせて来ています。

さて現代音楽では美の基準があまりに各個人に固有なものに片寄ってしまっていて、共有できる部分が少なくなり、全体としては発散に近い状態のようにも聞いています。もう一つは、世相が落ち着きと調和を失っているのも、音楽にも一部それが反映しているせいかもしれません。

では二十一世紀の数学に於る美の基準はどうなるのでしょうか。各個人の固有な審美感を深める事が重要であると同時に、共有できる美意識を持つこと、その為に分野を超えた理解をめざす presentation の工夫、等が数学の生き残りの為に更に大切になるのではないのでしょうか。

2 「環境問題」

数学をとりまく我国の社会環境の大きな変化一次の (I)(II)(III) —のうち、ここでは (I)、(III) を取上げたいと思います。

- (I) 政治・経済主導の競争原理にさらされつつある事。
- (II) ITの進歩と普及。
- (III) 「学力低下」傾向。

(I) ギリシャ時代に生まれ受継がれ発展してきた主な文化として、

A) 貨幣経済 B) 民主主義 C) スポーツ (オリンピック等)、D) 学問

があると思います。勿論、よいものだけでなく、都市間の戦争も奴隷制度もあったわけですが…。これらのうち、A)B)C) それぞれの独立した価値は現在でも認められていると思いますが、D) の独立性は危機に瀕しています。A) がグローバル化、電子化され強大になると共に、D) の価値までが経済効果によって、しかも数量化されて計られ勝負の対象にされつつあります。これは、数学のような基礎分野全体にとって大変不利ですし、各数学者もその社会で淘汰されずに生き残る為に短期的勝負を強いられそうです。

ギリシャ時代や、ずっと後のルネッサンス時代は、精密な計量と計算技術が進歩し、「価値の数量化」によって A) も著しく進展しました。民主主

義も数量による(価値)判断です。この頃飛躍的に発展し栄えた諸文化(科学、芸術…)も、富の蓄積によるところが大きいわけですが、これらの時代、文化的産物の価値までもが数量化されて評価されたという形跡は少ないと思います。文化の価値は独立であり、数値的評価を超えている事がよく理解されていたのではないのでしょうか。地中海地方の美しい自然と美貌にも恵まれたギリシヤ人やイタリア人の強い美意識とも無関係でないかも知れません。勿論、当時のように、比較的少数の巨人達が文化を進めていた時代と今とは事情も異なります。しかし経済主導の考えで学問分野にも競争原理が持込まれ、昔のように

「捨てる神あらば拾う神あり」

ではなく、「公平な」評価が求められると、どうしても文化的産物の価値も数値化して評価する傾向が強まります。それは、なるべく早く目の前にある価値物に数値を与えて安心したい、という「処置型心理」を生じると思います。これは、「価値そのものを心で感じとり、自分を変えてゆく」本来の文化への接し方まで変えてしまうでしょう。

美よりも、自分が自らの価値の指標と考えている数値の増加を楽しむ、それによる勝利を喜ぶ、そういった世の中になっていきそうなのを、「数の魔法使い」たる我々は、何とか出来ないのでしょうか。「もう遅い、時代は常に正しい、この世の中で適応して生きるしかない」のでしょうか。最近の話でも、財界出身のある校長先生が、教育上のインプット、アウトプットを数量化して効率化に役立てたい(!)、などと云っていました。

(II)については、ここでは省略します。

(III) 子供達の理科離れの一因については序文で述べさせていただきましたが、ここでは、その他の気になる点をいくつか列挙します。学力低下は、その内容も原因も複合的だと思います。

a) 「数学の才能は、多く16才頃迄に目覚める。しかし教育が証明の概念を教えないとそれより遅くなる」(ディユドンネ「数学史」より)

これは、将来数理科学の研究者になる可能性のある少数の中学生、高校

生を念頭に置いたものですが、私は、ユークリッド幾何を組織的に教えない事は、大変なマイナスだと思います。ユークリッド幾何にある、直感と論理の見事な融合、「ア、わかった!」という感覚がわかる為にこれ程優れた教材はないと思います。⁴ところがディユドンネ自身はユークリッド幾何を教える事に反対しているようです。現代数学の基礎になっていないからというのです。これはおかしい! 数学者が「社会の為に直接役立たなくても数学(教育)は大切だ」と一方で主張するのなら「高等数学に直接結びつかない数学の教育は無駄だ」というのは矛盾していると思います。証明をきちんと教えていないツケが大きいことは、入試の答案もくり返し証明してくれています。もう、「証明」を理解していない中学、高校の先生が増えているそうですから、深刻です。次の改訂のときに何とかならないでしょうか。

因みに、私自身は、「分数計算の出来ない大学生」にはそれ程ショックを受けません。その理由は、(i) 分数の和の計算の原理は、理系をちゃんとやろうとする学生には大切ですが、原理がわかっても普段使っていなければ手順を忘れる。大学生となった時それを一時忘れていたとしても、別にどうという事はない。(ii) 実用上はほとんど無用で、日常生活で必要になるのは一生の間に一、二回の「相続の計算」の時ぐらいのものではないでしょうか。ユークリッド幾何の方が大切だと思います。

b) 自己表現方法を学べる国語、音楽、美術、体育なども、それを減らすと理数系の科目の出来にもマイナスの影響がある、とのデータ(ドイツ)があるそうです。

一口に云えば、心身の調和が大切、という、当たり前の事ですが、子供達はそれぞれいくつもの適性をもっていて、詩心、歌心、絵心、リズム感等のうちその子が楽しさを感じとれるもので自己表現も十分に出来ることが大切でしょう。学校でコンピューターを沢山買う為に芸術関係の教師を備えなくなる、という話も聞きますが、子供達がコンピューターを使う能力を早めにつける事と、自分達の感性や身体能力に目覚めてそれを磨くの

⁴小平邦彦著「幾何のおもしろさ」(岩波書店) 参照

と、どちらを大切に思っているのでしょうか。コンピューターを使う能力など、大人になってからでも (その他の基礎能力がついていれば) 十分身につくと思います。この方面のプロにでもなる、という場合以外は早期教育は不要でしょう。日本人は概して主体的な自己表現が苦手、というのは、例えば音楽の分野でも云われているようです。⁵ その分、形式と正確さに頼る。又、他人の自己表現を苦々しく思い、これが自己表現の「自主規制」になってしまうという傾向があると思います。表現法を学べる科目が極めて大切と思うゆえんです。

c) 勉強とは、自らと異質なものも受入れながら自ら変わって行くものなのだから、各人がきちんと消化して受入れる為に、質問がしやすい事が大切。

先生も生徒も日本では質問に消極的なのは、恥の文化と、クラスの生徒数が多い事なども原因でしょう。

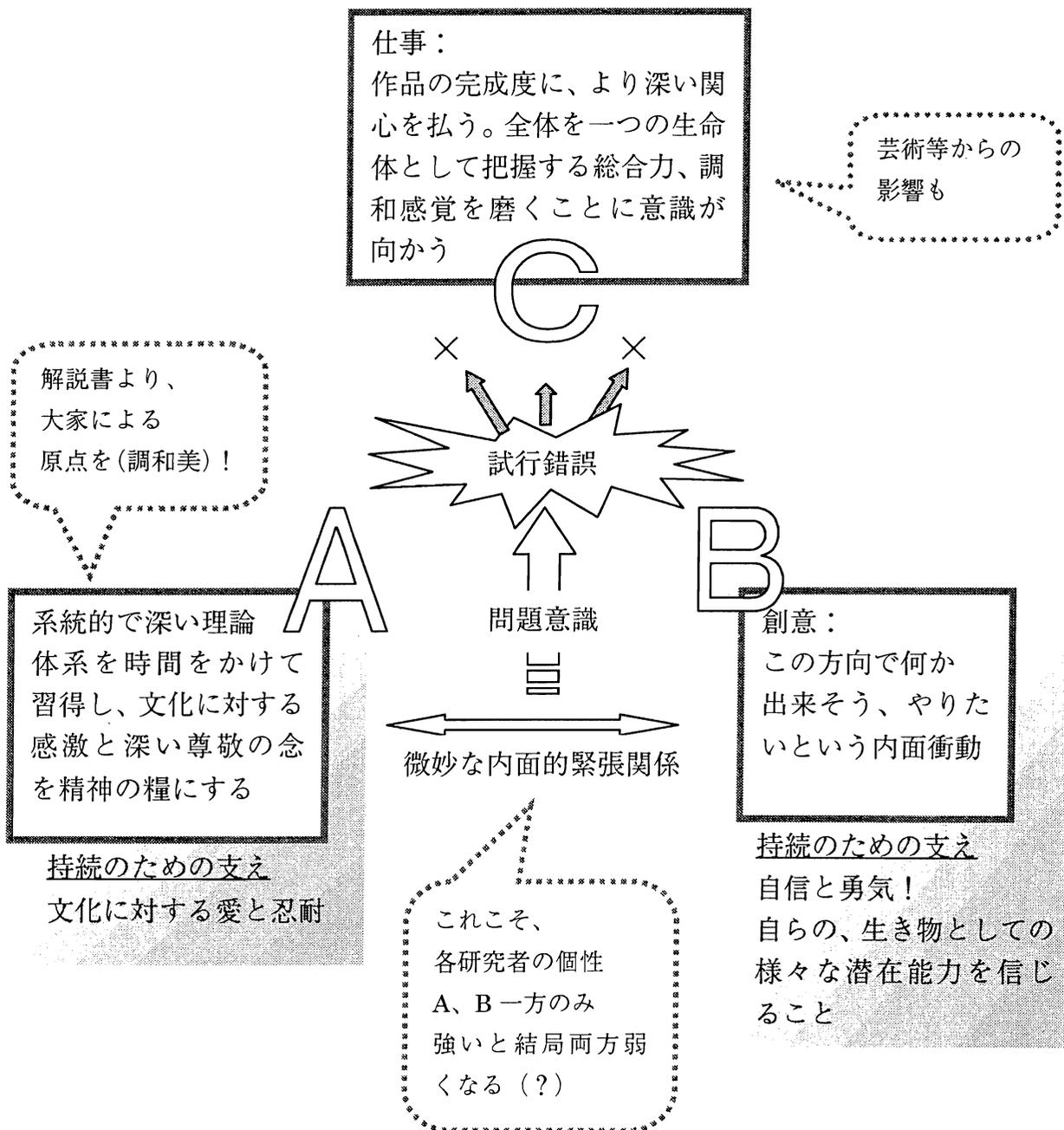
d) 勉強は、受験の為や「ハウツー」的技術を習得させる為だけではなく、もっと人類の築いてきた文化として、その素晴らしさを感じとれるように教えてほしい。(ピタゴラス・スクールのように)。

3 「ABC」

環境の変化は、我々数学者の学習、創意、創造のパターンにも徐々に、しかし大きな変化をもたらしつつあるのではないかと感じています。では学習(A)、創意(B)、創造(C)のパターンについて、次の三つの略図を御覧下さい。

⁵ テーリヒェン著「あるベルリン・フィル楽員の警告」心の言葉としての音楽 (音楽之友社)p126-127.

[パターン1] (円熟期。「文化」らしい時期)



尚、AとBの間の緊張関係は、各段階であると思います。問題を解く、自分流再構成、問題をつくる、啓発される、不満をもつ……。

[パターン 2] (苦しい競争の時代)

スピード発信に関心を払う。
形の上での一般性や、量的、
時間的優劣に関心が片寄る

パソコンの影響
Cut & Paste
で終りでは、一つの
生き物とみる感覚
が育ちにくい

C

未解決で自分にも出来そうな
ことを選ぶ

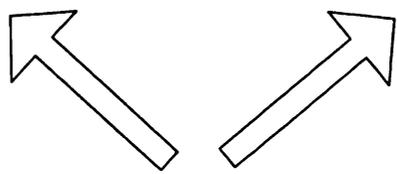
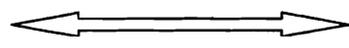
特定の情報検索
に頼ると、偶然の
出会いの機会が減
る

A

限られたテーマに
ついて、能率的に
勉強し、早く必要
な情報を得たい
と思う

B

研究も勝負だ
から、勝たなくて
は！ 数学も一つ
の情報発信競技

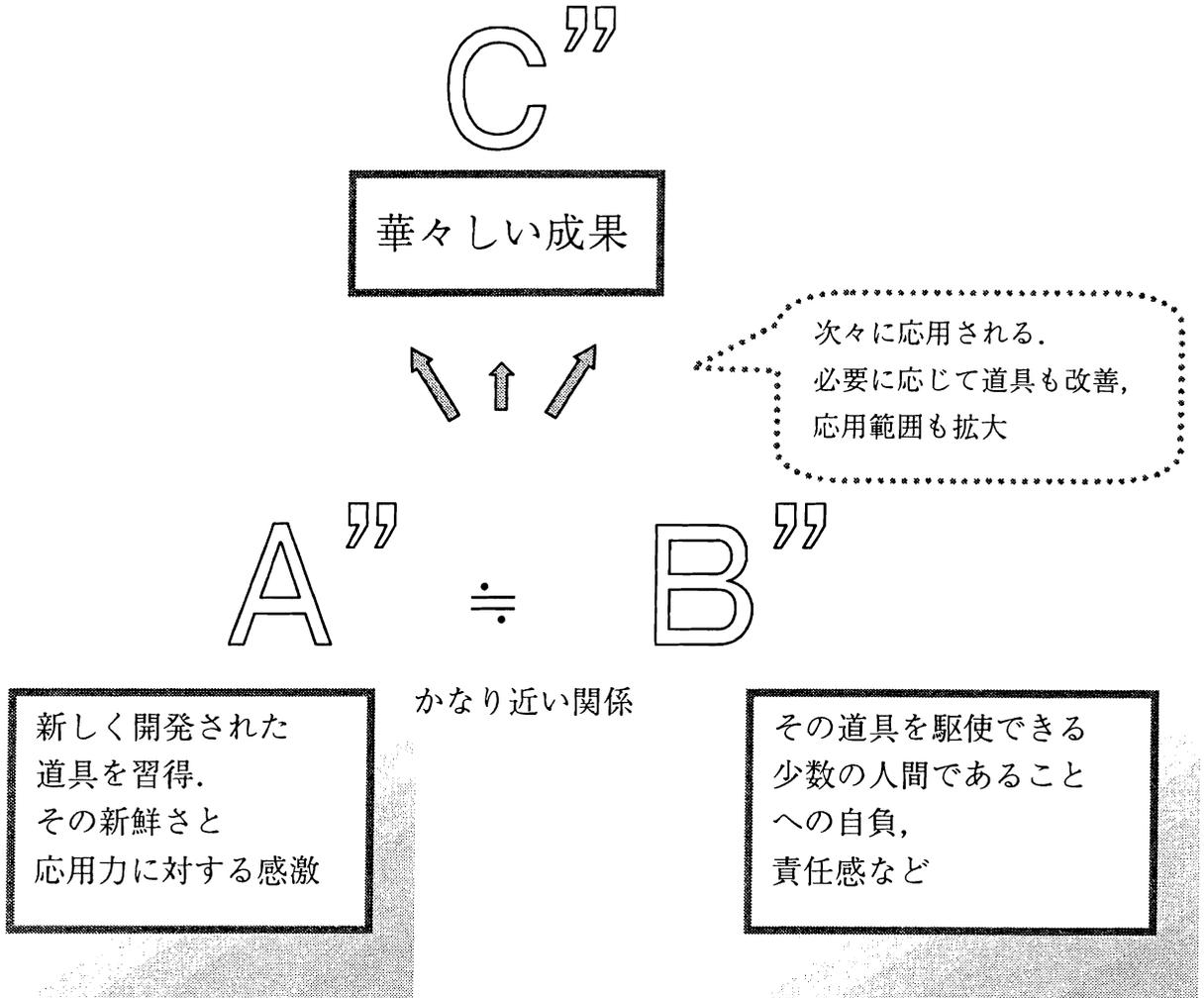


感激、尊敬の念を
持つ暇がない

今の社会環境からの強い影響

すべて当然の事で、わるい事ではないと思うのですが、もう少し気分の
余裕が持てれば・・・

[パターン3] (革命期。極く少数の人のゲーム)



[道具] 数学上の理論や、その他の道具。最初からそれに眼をつけ習熟、応用できる人は少い。段々に習得、使用できる人が増えると、「大道具」の場合はパターン1へ移行して一つの文化を形成し、「小道具」の場合は競争のみ激化してパターン2に直行しかねない。

では、道具そのものを創る更に少数の人は？

「もっともな事も、はっきり言ってしまうと、もっともではなくなるのよ！」
(原作「フィガロの結婚」(ボォマルシェー)より、スザンナの言葉)。

Explicit な図にすると、その至らないところが次々に見えて来ますが、そこは御容赦下さい。

小平先生はワイルの Riemann 面の本を読んで感激され、こういう事を高次元で出来ないかと考えたら... スラスラ出来てしまった! と云っておられました。これは [1] の $A, B \rightarrow C$ を代表しているとも見れますし、当時ワイルの本はまだ比較的新しかったから [3] と見ることも出来るでしょう。モーツァルトは (J.S. や C.) バッハ等の音楽に習熟し、深い尊敬の念を持ち、受入れるものは深く、そうでないものは全く受入れない中で、自らの感性と創意をもって作曲しました。これは [1] でもあるし、新しい作曲技法や楽器 (新しいピアノフォルテ、クラリネット) 等を駆使できた点で [3] でもあり、また最後の 10 年間独立した音楽家としてウィーンで苦しい活動を続けた時期は [2] の要素も多分にあったでしょう。

私の主な考えは、[3] がこれからも各分野で discrete に出現するのを待つ期間、苦しくても [1] 的要素が [2] 的なものに駆除されてしまわないように皆で頑張らなくてはいけないのではないか、という事です。そのうち、こういう差異の話すら、全く通じなくなってしまうのでは...

半々とまで行かなくても、[1] 的要素が最低全体の 3 割位は必要なのではないかと思えます。[3] の土台は、やはり [1] ではないか、と思うからです。

[1] を後世に残す為に、どうすればよいか? まず [1][2] を区別し、それを問題として意識する事。これが第一歩だと思います。

4 「再生」

ルネッサンス時代のイタリアと今の日本に共通しているのは、「価値の数値化」が進んでいる事や、激しい競争の時代、といった事でしょう。しかし、全く異なるのは、ルネッサンスの頃は

「人間の個人のもつ能力は凄い！」

「自分も人間だ！」

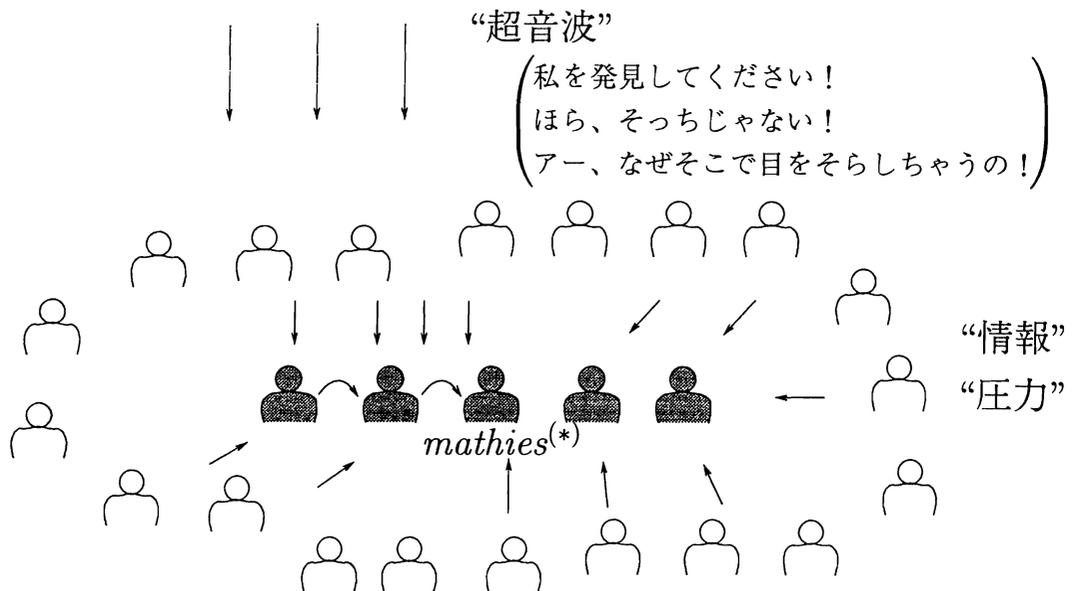
という意識をかなり多くの人が持っていて、それが驚くべきレベルで実証されていた、という事ではないでしょうか⁶。一方、今の日本の社会では「価値の数値化」が不合理に行過ぎ、社会全体の考えもあまりに保守的になっている…。他人に評価してもらえる指標で勝負し、勝たないと生きてゆけないというのが大部分の社会人の立場だとは思いますが。しかし、もう少し余裕のある「知」の分野の人は、「評価してもらえる指標」を固定せず、独自のアピールの仕方を更に工夫すべき立場にあると思います。例えば数学者が、そのうち（既に？）諸々の研究業績を評価する様々な指標をつくる委員会の委員にでも任命されたら、そういう所で、文化的産物の価値を数量化することの無意味さをしっかり主張してほしいと思います。又、若い人は、研究成果の発表で、より本質がわかりアピールできる話し方を工夫してほしい。（自分は下手でしたが、少くも工夫は随分したつもりです。）これによって、数学上の成果を、単に「情報」としてではなく「真善美」の一端として感じとり、共有し合えるようになる事が大切だと思います。自らの結果を急いで形にしたものを話し、聞く方もそれを情報として受取る、のではなく、「感激の伝達と共有」です。勿論、その為には感激できなくてはいけない…。又、数学は、一方向に無限に進んでいるわけではないので、感激の伝達も中々難しい。ここで「境界線」や「角」をくっきり見せる事が出来れば素晴らしいと思います。

又、現代は、少いものを大切にするより、多くのものを粗末に扱う時代です。数学の研究に必要な分析力と総合力をこの時代につけるのは大変だ

⁶ 「世界の歴史」 7 近代への序曲（中央公論社）。特に会田雄次氏執筆の各章を参照しました。

と思います。しかし、私にわかる範囲でも、新時代を担ってくれそうな素晴らしい方々が何人もおられます。きっと大丈夫でしょう。

数学の未開拓分野



(*) 私が数学者の愛称として“mathy”という言葉が使われるのを聞いたのは、80年代MSRI(米国バークレー)に於てでした。辞職することになった秘書の人が“I love mathies, though!”と云ったのだったと思います。

いはら やすたか (京都大学 数理解析研究所)

ご意見をお寄せ下さい。

ihara@kurims.kyoto-u.ac.jp