数とは何だろうか*

上野　健爾

はじめに

万物は数であるといったのは古代ギリシアのピュタゴラスですが，今日，私たちのまわりではたくさんの数が飛び交っています．今日の降水確率は 60%，昨夜の地震のマグニチュードは 5.6，我が国の国内総生産は 500 兆円，……．しかし，このように数を自由に使えるようになったのは比較的最近のことです．このことは，言い換えると数の世界は思いのほか複雑であることを意味します．今日は，数の不思議な世界を覗いてみたいと思います．特に，多くの人が疑問に持つ

1)　なぜ 0 で割ることができないのか？

2)　マイナス×マイナスはなぜプラスなのか？

3)　分数のわり算では分母と分子を逆にして掛けるとなぜ正しい答えがでるのか？

といったことを中心に話を進めたいと思います．こうした疑問は，実は数学の奥深いところと関係していて話し出すとどれだけ時間があっても足らないほど面白いことがあります．

また，ここ藤岡市は関孝和にゆかりの深い地ですが，関孝和は傍書法という名前で文字式を和算の世界に導入し，和算の発展の基礎を築いたことでも知られています．1、2，3，4 と具体的に数を記すかわりに、a や x という文字を使って数を記すことによって数学は深まってきました。数と式の深い関係がこれからの話で少し理解してもらえることを期待します．

1　数の記法

今日では，アラビア数字が使われていますが，このアラビア数字はインドにその源を持ち，アラビアを通してヨーロッパに伝わって来ました．インドや中近東では

*2000 年 10 月 13 日に行われた藤岡市主催の「おもしろ数学教室」での講演に基づき加筆修正したものです．

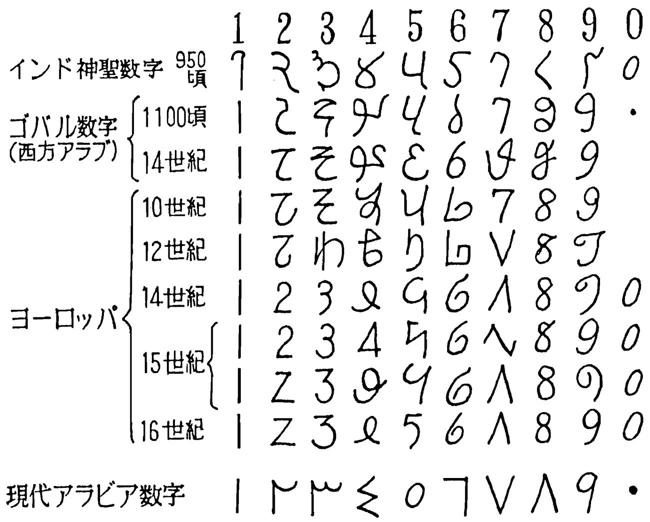

図 1: 西洋におけるアラビア数字の変遷

今日ではアラビア数字と少し違った数字を使っています．我が国では中国から伝わった漢数字を長い間使ってきましたが今日ではアラビア数字と漢数字が併用されています．こうした数の表記法は今日では 10 進法が使われ、位取り記数法を使って表されます。10 進法による位取り記数法では 0 から 9 までの数を使ってすべての数を表しています。たとえば 123 は 10 進法位取り記数法では百二十三を表します。このように数を位取り記数法を使って記すと、どんな大きな数でも簡単に記せることになります。漢字のように百、千、万、億といった数字を表す文字を用意しなくても 0 から 9 までの数を使ってすべての数を表すことができる 10 進法に基づく位取り記数法は大変便利です。

ところで、現在の世界でも様々な数字の表し方が使われています。

古代中国では数字は漢字で表す一方で、実際に計算では算木（正確には算籌（さんちゅう）という）を使って数を表し計算していました。この方法は長く中国で使われ、我が国でも江戸時代に盛んになった和算でも算木を使った表記法が実際の計算では使われました。算木を使った表記法では図 3 のようになります。これは実質的に 10 進法による位取り記数法になっています。

位取り記数法は何進法を使うかによって表す数が違ってきますので注意が必要です。古代バビロニアでは 60 進法が使われていました。これは今日でも 1 時間は 60 分、1 分は 60 秒を使うところにその名残が見ることができます。

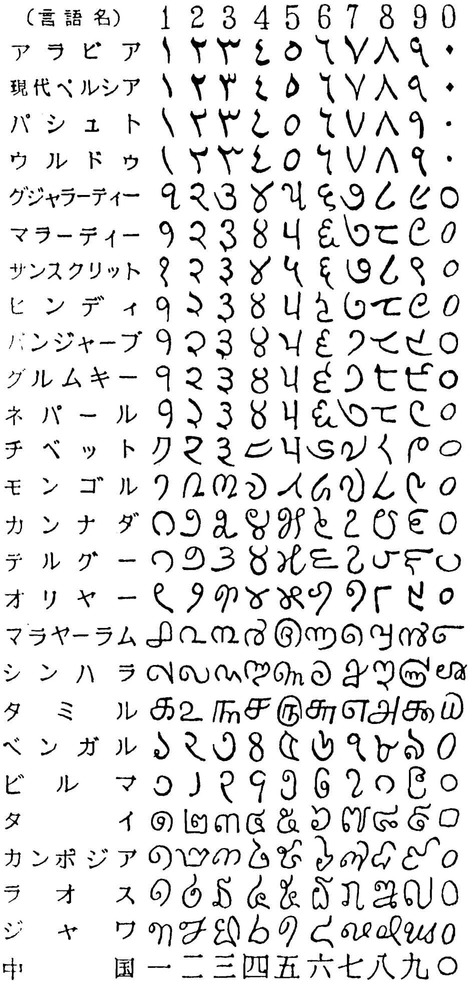

図 2: アジアの国々の数字

図 3: 算木（算籌）による数字の表記

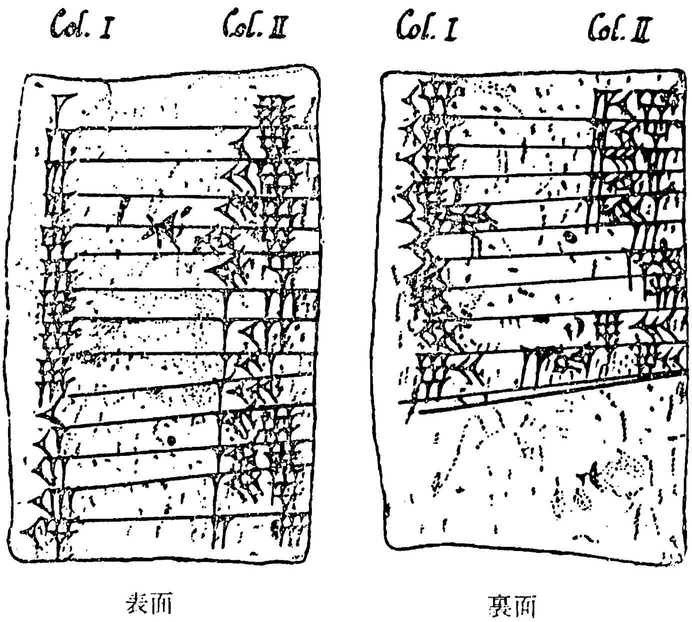

図 4: 古代バビロニアの粘土板

図 4 は古代バビロニアの粘土板です。数表であることは昔から分かっていました。古代バビロニアの楔形文字での数字の表わし方はよく知られていました。粘土板の左側には 1 から 16 までの数字が書かれていることがすぐ分かります。図 5 から分かるように 59 までの数字は 10 進法に基づく位取り記法が使われています。

このように考えて右の方の数を読むと 25、50、115、140、205 等々になります。最初の二つの数は $25 \times 1 = 25$, $25 \times 2 = 50$ を表わしていると考えられます。しかし、その次の数は 25×3 とは違います。古代バビロニアの数学を研究していた人たちは困惑してしまいました。古代バビロニアでは 60 進法が使われていたことはよく知られていたのですが、数字をどのように記していたかは長い間分からなかったのです。1920 年代になって O. ノイゲバウアーが古代バビロニアでは 60 進法に基づく位取り記数法が使われていることを発見してこの問題は解決しました。右側の 3 番目の数は 10 進法の 115 ではなく、1 と 15 の組み合わせで、15 は 60 進法の 1 の位、1 は 60 進法の 60 の位と見ると

$$60 + 15 = 75 = 25 \times 3$$

となります。これは 1 時間 15 分は 75 分ということと実質的に同じ計算です。次の数字の 140 は 60 の位が 1、1 の位が 40 となる数ですので

$$60 + 40 = 100 = 25 \times 4$$

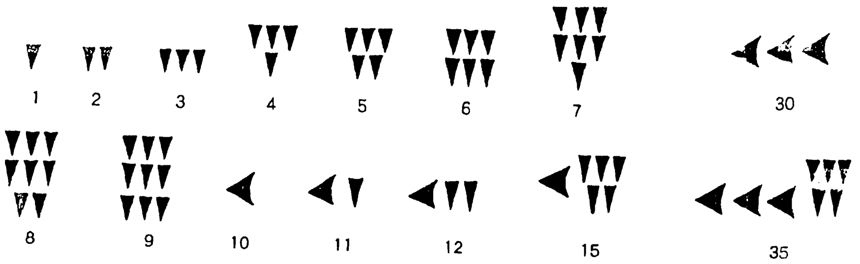

図 5: 楔形文字の数字

となります。さらにその次の数字 205 は 60 の位が 2、1 の位が 5 の数を表わしますので

$$2 \times 60 + 5 = 125 = 25 \times 5$$

九九ならぬ五十九五十九の掛け算の 25 の段の数表であることが分かったのです。

ここで、一つ記号を使うことにしましょう。数 a を n 回掛けることを a^n と書くことにします。

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}.$$

たとえば $60^2 = 60 \times 60 = 3600$, $10^3 = 1000$ となります。この記号を使うと 60 進法で書かれた数たとえば 60 進法の 8612 を 10 進法の数に直すには

$$8 \times 60^3 + 6 \times 60^2 + 1 \times 60 + 2 = 1749662$$

と計算すれば良いことが分かります。60 進法では 1 から 59 にあたる数を表す記号が必要になりますが、古代バビロニアでは数字は本質的には 1 から 9 にあたるものしか使わず、59 までの部分は実質的に 10 進法の位取り記数法を使っていたので、数学史家が混乱してしまったわけです。。

粘土板には、たとえば 58　39　25 と書かれていました。これを 10 進法の 583825 ではなく 60 進法の記法で 10 進法の数

$$58^2 + 39 \times 60 + 25$$

を表していたわけです。古代バビロニアでは数字 0 はありませんでした。位取り記数法で数字を表すときに 0 にあたる部分は空白で記されています。位取り記数法としての 0 はあったけれども数字としての 0 の認識はなかったと歴史家は考えています。

ところで、一日は 24 時間で午前、午後がそれぞれ 12 時間であるのは 12 進法の名残です。英語の数詞で 11 は eleven, 12 は twelve 13 から thirteen, forteen と続くのも 12 進法の名残です。しかし、21 からは twenty-one, twenty-two と 10 進法になって

います。フランス語では 20 進法の名残を見ることができます。80 は quatre-vingts (20 の 4 倍)、82 は quatre-vingt-deux (20 の 4 倍と 2) 90 は quatre-vingt-dix (20 の 4 倍と 10) と言います。10 進法は私たちの指が両手で 10 本に由来し、12 進法は親指を除いたそれぞれの指は関節によって 3 つの部分に分かれ、片手の指 4 本で 12 個あり、その部分を親指を数えると 12 まで数えることができることによると言われています。20 進法は両手両足の指の数が 20 本あることによると思われます。20 進法はマヤ文明で使われていました。

2　負の数

数

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

は自然数と呼ばれます。フランスのように自然数に 0 を加える国もあります。何を自然数と呼ぶかは約束ですからどちらが正しいかという問いは意味がありません。ただ、外国の本を読むときに注意する必要があります。

0 が発見されたのはインドであると言われています。既にそれ以前古代バビロニアで位取りで 0 にあたる部分は空白で記されていましたが、明確に 0 と言う数が意識されていなかったと言われています。0 と言う数は何もない状態を表す数であり、インドの空の思想と関連して、0 が誕生したと言われています。ただ、歴史的に残された一番古い 0 の使用は今日のタイやカンボジア地域であり、インド文化圏と中国文化圏が出会った所とされています。もちろん、残された資料は年号ですから 10 進法の位取り記数法を使った計算の中でも本当に 0 が使用されていたのかという疑問は残ります。しかし、いずれにしても 0 があるおかげで

$$5 - 5 = 0$$

という計算を記すことができるようになったわけです。0 の大切なはたらきはどのような自然数 m を持ってきても

$$m + 0 = m, \quad 0 + m = m$$

が成り立つことです。

ところで、自然数と 0 の世界では足し算は自由にできますが、$3-5$ のように引き算はできるとは限りません。そのために負の数を考える必要が出てきました。負の数の解釈としてよく借金を使って説明がされます。1000 円の借金は -1000 を表すと考えます。今、手元に 3000 円あり 2000 円借金をしていると、借金を返すことを考えると実質的に手元にと 1000 円残ります。これを

$$3000 + (-2000) = 1000$$

の計算の説明に使うことができます。もちろん

$$-2000+3000=1000$$

と計算してもかまいません。しかし、これはあくまで負の数と正の数の足し算の一つの説明であってマイナス掛けるマイナスがプラスになる事の説明には使えません。借金と借金を掛け合わすことはできません。負の数は引き算をする必要から登場しましたが、足し算と0をもとに説明することができます。たとえば -31 は自然数 31 をもとにして

$$31+(-31)=(-31)+31=0$$

となる数であると考えることができます。足し算は足す順序によらないことを強調したかったので二つの式をまとめて一緒に記しました。

上の式は言い換えると

$$0-31=31$$

と -31 を決めることと同じになります。ここで大切な役割をするのは引き算は足し算の逆であるという事実です。文字をつかってこのことを説明しますと、引き算 $a-b$ の答えが c である

$$a-b=c$$

ということは

$$c+b=a$$

となる数 c を見つけることに他ならないということです。具体的の例で説明すれば $500-700=-200$ であることは $c+700=500$ となる数 c が -200 であることを意味します。500 円手元にあって 700 円借りると実質的な借金は 200 円であることが $500-700=-200$ の一つの意味づけです。このことと 500 円手元にあるが 700 円必要があるとき 200 円借りればよいというのが $-200+700=500$ の一つの解釈になります。このように整数の足し算、引き算の意味づけてとして借金と手元にあるお金を使うことができますが、これはあくまで一つの説明であって、掛け算の場合はこれでは説明できないことに再度注意してください。

ところで、上の説明を使えば

$$0-(-36)=36$$

一般には

$$0-(-a)=a$$

であることはすぐ分かります。$c+(-a)=0$ となる c は a だからです。この事実を $-(-a)=a$ と記すことがあります。また、$a+(-b)=a-b$ であることも言えます。

次に掛け算と割り算を考えましょう。自然数では掛け算は自由にできました。掛け算の意味は自然数の範囲内では $a \times b$ は数 a を b 回足すことであると説明することができます。たとえば

$$5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$$

です。このように自然数の掛け算は同じ数を繰り返す足すことを表す記号だと解釈することができます。しかし、この解釈ですと

$$5 \times (-3) = -15$$

の説明はすぐにはできないことになります。負の数を含んだ掛け算には別の説明が必要になってきます。上の例ですと、掛け算は掛ける順番によらないので

$$5 \times (-3) = -3 \times 5 = \underbrace{(-3) + \cdots + (-3)}_{5} = -15$$

と考えると、以前の掛け算の解釈を使うことができます。しかし、掛け算は掛ける順序によらないことは自然数では明らかですが、負の数まで含めて正しいのだろうかと疑問を持つひともいるでしょう。実は整数の掛け算をきちんと定義しようと思うと掛け算は掛ける順序によらないと**約束**する必要があります。この約束をすれば負の数掛ける正の数が負の数になることが、上のように負の数を何回か足すことと解釈できることから分かります。

しかしながら、これでも負の数掛ける負の数の計算をどうしてよいのか分かりません。そのためにはもう一つ約束をする必要があります。それは整数の足し算、引き算と掛け算とを結びつける法則**結合法則**がすべての整数で成り立つことを約束することです。結合法則は文字を使えば

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

と表されます。掛け算 $m \times n$ を縦と横がそれぞれ m, n の面積を表すと解釈すれば、この結合法則は長方形の面積を使って簡単に説明できます。

しかしながら、この面積の説明では負の数を含む掛け算に対してはきちんとした説明はできません。面積をつかうことはあくまで一つの説明です。数学の立場からは分配法則がすべての整数の計算に対して成り立つことを**約束**することによって負の数を含む掛け算を説明することができるのです。また、掛け算は掛ける順序によらないことも上で述べたようにいつも約束します。

分配法則が成り立つことを約束すると負の数の掛け算がどのようになるかが明らかになります。そのためには、まず 0 の役割をはっきりさせておく必要があります。

$$0 + 0 = 0$$

ですので、すべての整数 a に対して

$$a \times (0 + 0) = a \times 0$$

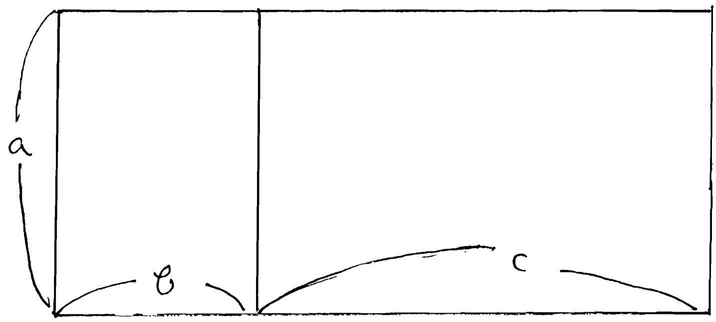

図 6: 長方形の面積と分配法則

が成り立ちます。一方、分配法則から

$$a \times (0+0) = a \times 0 + a \times 0$$

が成り立ち、二つの式を合わせると

$$a \times 0 + a \times 0 = a \times 0$$

が成り立ちます。この式の両辺から $a \times 0$ を引くと

$$a \times 0 = 0$$

が成り立つことが分かります。すなわち、すべての整数 a を掛けると 0 になることが分かります。a が正の整数であれば $a \times 0 = 0 \times a$ は 0 を a 回足すことを意味するので結果は 0 であることは明らかです。しかし、この説明は a が負の数の時は使えませんが、分配法則が成り立つことを約束することによって、いつでも $a \times 0 = 0$ を示すことができるわけです。

ではなぜ 0 でわることができないのでしょうか．割り算

$$a \div b = c$$

は

$$c \times b = a$$

となる数 c を求めることを意味します。一般には整数の範囲で c を求めることはできませんので分数が必要となりますが、このことについては次節で説明します。

さて

$$a \div 0 = c$$

と割り算ができたとしましょう．割り算は掛け算の逆ですのでこれは $c \times 0 = a$ を意味します．すると $a = 0$ でなければなりません．ですから，まず，0以外の数を0で割ることはできないことが分かります．では $0 \div 0$ はできるのでしょうか．$0 \div 0 = c$ とおくと，$c \times 0 = 0$ となる数 c を見つけることになりますが，実はどのような数でも0を掛けると0になります．したがって答えが無数にあることになります．しかし割り算の答えは一つでないと困るので，0を0で割ることは禁止します．

このように考えてくると，数の計算はずいぶん難しいと思われるかもしれません．実際に，数の計算は数学の大切な基礎になっています．数の計算原理をもとにたくさんの数学ができあがっています．たとえば，0を0で割ることはできないことを言いましたが，このことをさらに深く考えることによって微分という考え方に到達します．私たちが，日頃何げなく行っている計算の先には広大な数学の世界が拡がっています．

さて、次に m, n を整数としましょう。

$$n + (-n) = 0$$

ですので

$$m \times \{n + (-n)\} = m \times 0 = 0$$

が成り立ちます。一方、分配法則から

$$m \times \{n + (-n)\} = m \times n + m \times (-n)$$

が成り立ち

$$m \times n + m \times (-n) = 0$$

となります。この両辺から $m \times n$ を引くと

$$m \times (-n) = -(m \times n)$$

が成り立つことが分かります。このことは m, n が自然数であれば $m \times (-n) = -n \times m$ を使って説明することができます。しかし、上の方法ですと負の整数の場合も含んでいます。

さて、上の計算で自然数 a, b を使って $m = -a,\ n = b$ と置いてみましょう。すると

$$(-a) \times (-b) = -\{(-a) \times b\}$$

となることが分かります。

$$-\{(-a) \times b\} = -\{-(a \times b)\} = a \times b$$

ですので
$$(-a)\times(-b)=a\times b$$
であることが分かります。この事実をマイナス掛けるマイナスはプラスになると言うことがあります。このように、分配法則が成り立つことを約束することによって何故イナス掛けるマイナスはプラスになるかを説明することができました。しかし、これでは分配法則が成り立つようにマイナス掛けるマイナスはプラスと約束したに過ぎないではないかという不満の声が聞こえてきます。これは鋭い指摘なのですが、じつはその通りなのです。逆に言えばマイナス掛けるマイナスはプラスと約束しないとおかしなことが起こるのです。そのことを見ておきましょう。

たとえば
$$-5\times(-3)=-15$$
が成り立ったとしましょう。一方
$$-5\times 3=-15$$
が成り立ちますので分配法則から
$$-5\times(-3+3)=-5\times(-3)+(-5)\times 3=-15+(-15)=-30$$
が成り立ちます。一方
$$-5\times(-3+3)=-5\times 0=0$$
となります。したがって $-30=0$ が成立することになりますが、これは間違っています。このようなおかしなことが生じたのは $-5\times(-3)=-15$ と仮定したことによります。

古代の中国では負の数の足し算、引き算は紀元元年前後には自由にできるようになっていました。正の数は赤で負の数は黒で記したと伝えられています．しかし、負の数の掛け算、割り算ができるようになってのは 12 世紀でした。千年以上の長い年月が必要だったのです。分配法則が明確に意識されるようになったのはここ 200 年くらいのことですので、上の説明で納得しがたいことはやむを得ないことだと思います。しかし、負の数の計算という一見易しいことの奥深くには深い数学が潜んでいるのです。

ところで、古代ギリシア人は掛け算は面積と考えたために a^2 は面積を a は長さを表すので足しあわせることはできないと考えていました。a^2 を面積と考えずにただの数と考えれば a^2+a を考えることができるとはっきりと表明したのは 16 世紀のデカルトでした。それほど私たちの思い込みには根深いものがあります。数学の歴史はこうした思い込みからどれだけ自由になれるかという歴史でもあります。

3　分数

さて、負の数を導入して整数をつくり、足し算、引き算、掛け算が自由にできるように計算の仕方も決めました。しかし、割り算は整数の中だけではできません。そこで、昔から分数を考えました。$a \div b$が決める数を$\frac{a}{b}$と記すことにしましょう。これだけでは$\frac{a}{b}$の意味ははっきりしません。ここでは割り算は掛け算の逆であるという立場をとります。すなわち

$$a \div b = c$$

であることは数cが

$$c \times b = a$$

満足することであると考えるのです。このことは整数aが整数bで割り切れるときはたとえば

$$18 \div 6 = 3$$

を考えれば分かるように、正しいことはすぐに分かります。したがってaがbで割り切れないときは数$\frac{a}{b}$は

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

となる数であると考えるわけです。厳密にいえばこのような数はただ一つしかないことを示す必要がありますが、このことは保証されていると考えて先に進むことにします。このように説明すると怪訝そうな顔をする人がいます。小学校では分数は「全体の３分の１」といったように割合を表したり、ケーキ１個を３人で分けたときの一人の分け前が３分の１であるというような分割を表すと教えられて、上のような説明を受けたことがないからだと思います。実際分数をどう考えるかはじつに長い時間がかかりました。分数は数だけでなく

$$\frac{x^2+3x+1}{x^4+5x^2+5}$$

のように分数式としても登場します。しかし、小数はではこのようなことはできません。次節で述べるように、小数は位取り記数法と深く関係していますが、分数は位取り記数法とは直接関係ありません。整数の全体では割り算ができないので新しい数として分数は導入されます。この分数の役割は通常の数ではなく足し算、引き算、掛け算ができる「数」の体系（正確には整域という整数の全体や多項式の全体などを含む『数」の体系）で定義することができます。

分数の計算は足し算、掛け算が順序によらないこと、また分配法則が成り立つように約束する必要があります。その前にまず、通分ができることを上の定義に基づいて示しておきましょう。整数a, b, mに対して分数$\frac{a}{b}$は

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

となる数であり $\dfrac{am}{bm}$ は

$$\frac{am}{bm} \times bm = am$$

となる数です。最初の式の両辺を m 倍すると

$$\frac{a}{b} \times bm = am$$

となりますから

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

でなければならないことが分かります。分数の足し算では分母が同じときは

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

だと小学校の時に習いました。$\dfrac{a+b}{m}$ は

$$\frac{a+b}{m} \times m = a+b$$

となる数です。一方、分配法則を使うと

$$m \times \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) = m \times \frac{a}{m} + m \times \frac{b}{m} = a+b$$

となり $\dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{m}$ は $\dfrac{a+b}{m}$ に一致しなければならないことが分かります。分母が異なるときは通分して計算すればよいわけです。

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}$$

では分数の掛け算も同じ考え方で説明がつくのでしょうか。そのためには 3 個以上の数の掛け算の結合法則が成り立つことを必要とします。結合法則は

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

が成り立つということです。整数 n, a, b に対して

$$n \times \frac{a}{b} = \frac{na}{b} \tag{1}$$

と約束します。$\dfrac{na}{b}$ は

$$\frac{na}{b} \times b = na$$

という数ですが、結合法則を使うと

$$(n \times \frac{a}{b}) \times b = n \times (\frac{a}{b} \times b) = n \times a = na$$

となり、(1) が正しいことが分かります。一般の分数の積は

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$$

と約束しますが。これも

$$\begin{aligned}(\frac{a}{b} \times \frac{m}{n}) \times bn &= \frac{a}{b} \times (\frac{m}{n} \times bn) \\ &= \frac{a}{b} \times \frac{mbn}{n} \\ &= \frac{a}{b} \times mb \\ &= am\end{aligned}$$

となって $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n}$ は $\frac{am}{bm}$ と等しいことが分かります。このように分数の計算は結合法則、分配法則が成り立つように約束されていることが分かります。

では分数の割り算はなぜ分母と分子を入れ替えて掛けることになるのでしょうか。

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

が割り算の公式です。割り算は掛け算の逆であることを分数でも正しいと約束します。則ち $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = A$ は

$$A \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

となる数 A を求めることに他なりません。分数の掛け算の公式を使うと

$$\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$$

となり $A = \frac{ad}{bc}$ であることが分かります。何だかだまされたような議論ですね。これでは納得でいないという人が多いようですので、もう少し説明を付け加えてみます。

割り算の基礎は実は

$$1 \div \frac{c}{d}$$

を求めることにあります。といいますのは、積の結合法則から

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times (1 \div \frac{c}{d})$$

も成り立つことが分かるからです。なぜなら $1 \div \frac{c}{d} = B$ とおくと $B \times \frac{c}{d} = 1$ なので、積の結合法則より

$$\left\{\frac{a}{b} \times \left(1 \div \frac{c}{d}\right)\right\} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \left(B \times \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

となるからです。しかし分数の積より

$$\frac{d}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{cd}{cd} = 1$$

となるので

$$1 \div \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$$

と B は分母と分子を入れ替えた分数となるわけです。これが割り算では分母と分子を入れ替えて掛け算をすることになる理由です。

このように考えてくると、分数を決めるためには $b \neq 0$ であれば $c \times b = a$ となる数 c がただ一つあることが重要であることに気づきます。このことを保証している事実は

$$m \times n = 0$$

であれば $m = 0$ または $n = 0$ が成立するという当たり前の事実です。なぜならばもし

$$c_1 \times b = a, \quad c_2 \times b = a$$

が成立したとすると、分配法則から

$$(c_1 - c_2) \times b = c_1 \times b - c_2 \times b = 0$$

が示され、$b \neq 0$ なので $c_1 - c_2 = 0$ でなければならないからです。このように、分数の計算は整数の性質を使ってじつに上手に決められていることが分かります。こうした分数の持つからくりが本当に分かったのは1920年代に抽象代数学が発達し、数の四則演算の持つ性質をはっきりさせたことによります。もちろん、こうした考えを小学校で直接教えることはできません。こうしたことを理解するためにはある程度抽象的に考えることができることが必要になるからです。それとともに、数学が抽象的になっていくのは、抽象化することによって数学的な対象が持つ性質を明確に取出し、その性質がどの範囲で成り立つのかをはっきりさせることによって、数学の適用できる範囲が拡がっていくからです。

ところで、分数の割り算を次のように小学生が工夫したという話を聞きました。

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3 \times 6 \div 2}{5 \times 6 \div 3} = \frac{9}{10} \tag{2}$$

分母分子の中間に出てくる数6は2と3の最小公倍数です。答えは通常の計算

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

と一致します。また(2)に出てくる6のかわりに2と3の公倍数をどのように選んでも正しい答えが出てきます。たとえば公倍数24を使うと

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3 \times 24 \div 2}{5 \times 24 \div 3} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$$

となります。実は最初の計算方法はいつでも正しいのです。文字を使ったほうが分かりやすくなりますので文字を使って説明してみましょう。

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times cd \div c}{b \times cd \div d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

と書けば分かりやすいと思います。このように具体的な数値による計算よりは文字を使うほうがどのような計算をしているのか計算のからくりがよく分かる場合があります。

分数は割り算の結果ですから

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

と書くこともできます。事実割り算の記号 $\div$ を使うのはイギリスや日本など一部の国です。以前、ロシアの数学の教科書を見せてもらったことがありますが $a \div b$ のかわりに a/b と記してありました。このように割り算と分数の関係を考えれば

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

が成り立つことが分かります。

$$\frac{a \div c}{b \div d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc}$$

ですからこれは

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

と確かに結果は一致します。小学生が行った計算はこうして文字を使って考えてみるとなかなか面白い着想であることが分かります。先生方もそんな計算法は教科書に書いてないと一蹴するのではなく、上の説明をもとに小学生に分かるような説明を工夫されることを希望します。

ところで、古代ギリシア人は分数を数とは認めていなかったようです。分数は比の値として捉えていて、自然数だけが（古代ギリシアには負の数はありませんでした）数と考えていたようです。分母が 1 の分数は整数ですから、分数の全体を考えると加減乗除の四則演算ができることが分かります。分数の全体を有理数と呼びます。有理数は英語の rational number の訳です。rational は ratio から出てきた言葉で ratio は「比」を意味します。ですから古代ギリシア人の思いを込めて訳すと有理数よりは有比数（比を持つ数）の方が正しい訳語だと思われます。

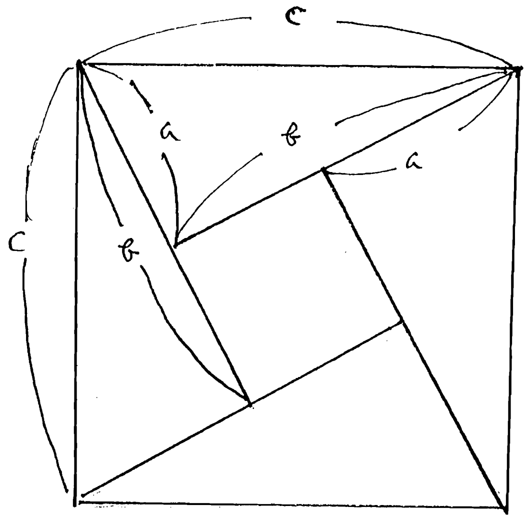

図 7: ピュタゴラスの定理の一証明

4 無理数の誕生

ピュタゴラスは「万物は数である」と言ったと伝えられています。森羅万象のすべては自然数を使って説明できるというのがピュタゴラスの考えだったのでしょう。しかし、この素晴らしい考えが間違いであることを見いだしたのはピュタゴラスその人であったと伝えられています。中学校でピュタゴラスの定理（三平方の定理）を学びます。直角三角形 の三辺の間には

$$a^2 + b^2 = c^2$$

という関係があるという定理です。この定理は通常は幾何学的に証明されますが、文字式を援用すると次の図 7から簡単に導くことができます。古代中国の天文学書「周髀算経」に出ている弦図はこの証明法を使ったものと言われています。

図 7 の正方形の一辺の長さは c であり、直角三角形の面積は $\dfrac{ab}{2}$ であり、真ん中の正方形の一辺の長さは $b-a$ である。したがって

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

となります。

ピュタゴラスの定理を使って一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを計算すると $\sqrt{2}$ を得ます。もし、$\sqrt{2}$ が有理数だとすると自然数 p, q を使って

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

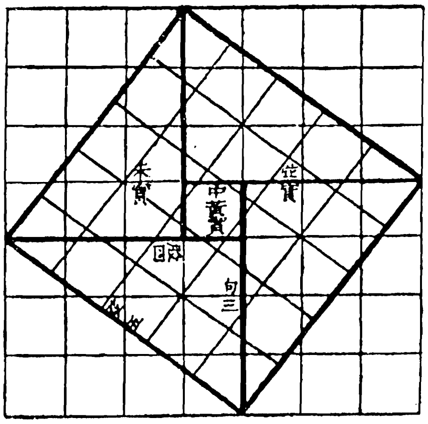

図 8: 周髀算経の弦図

と表すことができます。このとき、p, q は共通の約数を持たないと仮定することができます。この両辺を 2 乗すると

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

となりますので

$$2q^2 = p^2$$

を得ます。したがって p^2 は 2 で割り切れなければなりません。すると p は 2 で割り切れなければならなくなり $p = 2p'$ と書くことができます。これより

$$q^2 = 2p'^2$$

が成り立つことが分かり、上と同じ議論により q は 2 で割り切れなければならないことになります。すると p, q ともに偶数となり共通の約数を持たないという仮定に反します。以上の議論により $\sqrt{2}$ を有理数と考えると矛盾が生じることが分かります。これは $\sqrt{2}$ が有理数ではないことを意味します。このようにして、有理数ではない数がこのようの中にあることが分かったのです。ピュタゴラスはこのことを知ると羊を生贄として神に捧げたとの伝説が伝えられています。有理数以外の数が存在するということは古代ギリシア人にとっては衝撃的なことでした。プラトンの対

話編「テアイテトス」に平方数でない自然数 n の平方根 $\sqrt{n}$ が無理数であることの証明が詳しく記されています。皆さんも証明に挑戦してみてください。

ところで、無理数はたくさんあります。円周率 π も無理数です。このことは後に示したいと思います。

5　小数

ところで数には分数のほかに小数があります。小数は分数のかわりに割り算を繰り返し行うことによって得られます。たとえば、

$$\frac{1}{3} = 0.33333333333333\cdots \tag{3}$$

が成り立つことは皆さんもよく知っています．これは割り算を続けていくことによって分かります。

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 0. & 3 & 3 & 3 \\
3\,) & 1 & 0 & & \\
 & & 9 & & \\
 & & 1 & 0 & \\
 & & & 9 & \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & & & 9 \\
 & & & & 1
\end{array}$$

分数 $\frac{1}{7}$ の割り算はさらに面白い計算になります。

$$\begin{array}{r|ccccccc}
 & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\
7\,) & 1 & 0 & & & & & \\
 & & 7 & & & & & \\
 & & 3 & 0 & & & & \\
 & & 2 & 8 & & & & \\
 & & & 2 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 4 & & & \\
 & & & & 6 & 0 & & \\
 & & & & 5 & 6 & & \\
 & & & & & 4 & 0 & \\
 & & & & & 3 & 5 & \\
 & & & & & & 5 & 0 \\
 & & & & & & 4 & 9 \\
 & & & & & & & 1
\end{array}$$

この後の計算は最初の計算の繰り返しになります。したがって

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$$

と同じ数の列の繰り返しになります。このような小数を循環小数といいます。繰り返す数の列 14857 を循環節といい、この循環小数を循環節の最初と最後の数の上に・をつけて次のように表します。

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0.\dot{3}\\ \frac{1}{7} &= 0.\dot{1}4285\dot{7}\end{aligned}$$

また

$$0.2\dot{3}\dot{4} = 0.234343434\cdots$$

も循環小数です。その一方で

$$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{1}{5} = 0.5$$

のように有限小数も分数を小数に直すときに出てきます。既約分数の分母が 2 と 5 の倍数の時のみ有限小数が出てきます。それ以外の有理数（分数）は循環小数になります。割り算をしていくとき、割り切れれば有限小数、割り切れないときは循環小数になります。割り算を行うと割り切れないときは余りは常に 1 から 9 までの数が出てきますので、割り算を繰り返していくと必ず以前に出たのと同じ余りが出てきます。そうすると後の計算は同じ余りになった以前の計算を繰り返すことになり、循環小数が出てくるわけです。

小数は位取り記数法に基づいていると前の方でお話しました。これはどのような意味でしょうか。

$$0.1 = \frac{1}{10}, \quad 0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}, \quad 0.\underbrace{0\cdots0}_{n-1}1 = \frac{1}{10^n}$$

ですから、有限小数ではたとえば 0.523 は

$$\frac{5}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} = \frac{523}{1000}$$

を意味します。もっと一般的に書けば有限小数では

$$0.a_1a_2\cdots a_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

を意味します。もし古代バビロニアのように 60 進法を使って小数を記していればたとえば

$$0.523 = \frac{5}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{3}{60^3}$$

となります。このように小数は何進法を使っているかによって意味が違ってくるのです。古代バビロニアの天体観測は大変正確であり、その観測結果は 60 進法の小数で記されていました。この観測結果はチェコ・ブラーエの観測が行われまで実際に使われていたと言われています。実際角度は 1 度は 60 分、1 分は 60 秒という単位が使われているのは古代バビロニアの名残です。

ところで無理数は $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ のように無限に続く小数として表すことができます。そうすると

$$\sqrt{2} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \cdots$$

と書くことができます。今度は有限小数と違って和は無限に続きます。それを私たちは $\cdots$ と記しています。しかし、無限に続く和が本当に意味を持つのか考えてみると当たり前ではなくなってきます。このことについては後でお話しします。

6　無限の登場

話が少し難しくなりましたので，頭の体操をしてみましょう.

$$\frac{1}{3} = 0.33333333333333\cdots \tag{4}$$

の両辺を 3 倍すると

$$1 = 0.99999999999\cdots \tag{5}$$

が成り立ちます.

不思議な顔をしている人がたくさんいます．それは当然です．0.9999999999999 とたくさん 9 を並べても，絶対に 1 には等しくないからです．実は，等号 = の意味がここでは変わっているのです.

$$0.9, \quad 0.99, \quad \ldots, 0.9999999999, \ldots, 0.0.99999999999, \ldots$$

と小数点以下に現れる 9 の数を大きくしていくと，どんどん 1 に近づいていくというのが等号 = の新しい意味なのです．実は (3)，(4) の等号の意味もこの新しい意味なのでした.

このことを実際に調べてみましょう。そのため、自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$a_n = 0.\underbrace{99\cdots9}_{n}$$

と置きましょう。$a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, a_3 = 0.999$ と n が大きくなるにつれて a_n も少しずつ大きくなっていくことが分かります。前節の説明から

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &= 9\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}\Big) \end{aligned} \tag{6}$$

であることが分かります。分数の掛け算から

$$\frac{1}{10^m} = \left(\frac{1}{10}\right)^m$$

が成り立ちますので a_n を調べるためには

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \tag{7}$$

を計算する必要があります。今の場合は $x = \dfrac{1}{10}$ です。式(7) に $(1-x)$ を掛けてみます。次の式の計算では分配法則を使って計算しています。

$$\begin{aligned}(1-x)(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) &= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - x(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) \\ &= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1}) \\ &= x - x^{n+1}\end{aligned}$$

最初と最後の式を $1-x$ で割ると

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \tag{8}$$

を得ます。0で割ることは禁止していますので、この等式が成り立つためには $x \neq 1$ と約束する必要があります。この等式(8) の x を $\dfrac{1}{10}$ とおくと

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)$$

が成り立ちます。したがって式(6) より

$$a_n = 10 \times \left(\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 - \frac{1}{10^n}$$

が出てきます。仰々しい計算をしましたが、このことは

$$1 - 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 0.\underbrace{00\cdots001}_{n} = \frac{1}{10^n}$$

と直接計算することが可能です。いずれにしても n が大きくなっていけば 1 と a_n との差はどんどん小さくなって行き、無限の彼方で 1 になってしまうことを意味します。しかし、無限の彼方とは何でしょうか。そんなことを考えることに意味があるのでしょうか。n はどんなに大きくなっても絶対に 1 より小さいのですから

$$1 = 0.99999999\cdots$$

はやはりおかしいのではないでしょうか。実はここで等号の意味が上で述べたように違って来ているのです。$1 = 0.99999\cdots$ というのは n をどんどん大きくしていくときに1に近づくことを意味する等号です。

別の書き方をした方が分かりやすいかもしれません。一般に n が大きくなるときに数列 b_n がある数 α に近づくことを

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

と記します。このことは言い換えると差 $\alpha - a_n$ は n が大きくなるにつれてどんどん小さくなっていくことを意味します。この記法を使えば $0.999999999\cdots$ は

$$\lim_{n\to\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n}$$

を意味します。

このように等号の意味を拡張すると，たとえば

$$0.6 = 0.59999999\cdots$$

が成立します．なぜならば

$$0.0999999\cdots = 0.01$$

となり、

$$0.5999999\cdots = 0.5 + 0.0999999\cdots = 0.5 + 0.1 = 0.6$$

となるからです。このように、有限小数は最後の桁の数から1を引いて次の桁から9が続く循環小数として表示することも可能です。

この話は納得できないと思っているひとが沢山いるようです。これは無限に関わる話で古代ギリシアから問題にされてきたものです。皆さんの中にはアキレスと亀の話を聞かれた方もいるかもしれません。このことをお話しする前に、無限の不思議を教えてくれる話をまずしましょう。この話は物理学者のガモフの本「1、2、3…無限大」に記されているものです。(日本語訳は「宇宙＝1、2、3… 無限大」というタイトルで白揚社から出版されています。)

遠い星のホテルに旅人がやってきてフロントの係に空き部屋はないかと尋ねました。係から「お客様申し訳ありません。あいにく今日は満室です。」と返事が返ってきました。旅人は困ってしまいました。その星にはホテルが一つしかなかったからです。客の困った顔を見ていたフロントは突然にっこり笑って「お客様、大丈夫です。部屋を用意できます。」と言い出しました。「1号室のお客様を2号室へ、2号室のお客様を3号室へ、3号室のお客様を4号室へと次々へ移ってもらいますので1号室が空きます。」というのがフロントの説明でした。このホテルは客室が無限にあったのです。

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & \cdots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & \cdots
\end{array}$$

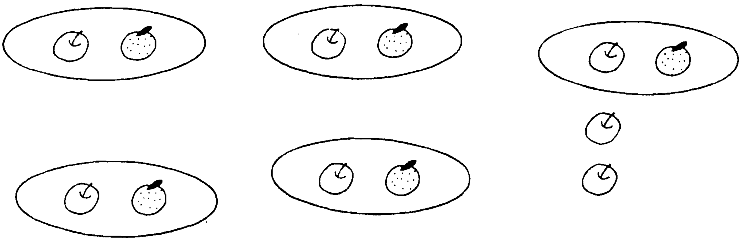

図 9: リンゴとミカンの個数を比較する

部屋が無限になかったら最後の部屋の客は移る部屋がありませんからこのようなことはできません。無限であることが重要です。

もっと不思議なことも無限では登場します。次のように自然数の全体と偶数の全体とは同じ無限の個数があると言うことができます。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & \cdots \end{array}$$

偶数は自然数の一部でしかないのに個数が同じというのは変なのですが、私たちは数を充分に数えることができなかった幼児のときは個数が同じかどうかを調べるにはこのように二つの集まりから一つずつ取り出して対を作ることを行いました。幼児にかえってこうした数え方を無限に対して行ってみると一見奇妙な結論に到達したわけです。

全体とその一部の個数が等しいことがあるという奇妙な現象は無限に特有の現象です。このように、無限を数えることを提案したのはカントールという数学者でした。かれがこうした提案をした 19 世紀後半には多くの数学者がこのカントールの考え方に反対しました。しかし、今日ではカントールの考え方は無限に対する基本になっています。カントールは多くの数学者が集合論に反対したときに「数学の本質はその自由性にある」と反論しました。自由に考えることは簡単そうで実は難しいことです。私たちの先入観がどれほど根強いものであるか、それから自由になるのはどれほど難しいことであるかはカントールの例が如実に語っています。カントールは精神病院で一生を終わったのです。しかしカントールの創始した集合論は今日の数学では欠かすことのできないものとなっています。

さて、ゼノンの逆理（パラドックス）で知られるアキレスと亀の問題を考えてみましょう。アキレスはギリシア神話に登場する足の速い神様です。一方、亀はゆっくりしか進めません。ゼノンのパラドックスはアキレスが先を進んでいる亀を追いかけるとき、亀が最初にいた地点 P_1 にアキレスが到達したとき、亀は先の方へ進ん

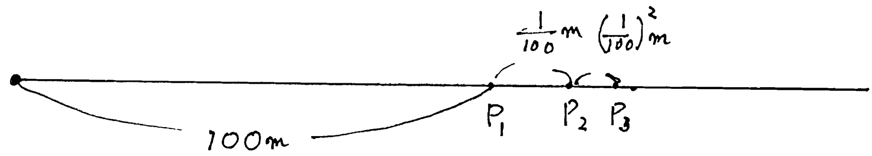

図 10: アキレスと亀

で、地点 P_2 に達しています。そこでアキレスは地点 P_2 に向かって走り P_2 に到達します。その間に亀は地点 P_3 に達しています。次にアキレスが P_3 に達したときには亀は P_4 に達しています。このように、アキレスが亀がいた地点に到達しても亀は常に先へ進んでいてアキレスはいつまでたっても亀に追いつかないというのがゼノンのパラドックスです。パラドックスというのはアキレスが亀に追いつくのは明らかだからです。ではゼノンの議論のどこがおかしいのでしょうか。

アキレスが 100 メートル先の亀を追いかける場面を考えてみましょう。アキレスは 1 分間に 100 メートル進むとしましょう。一方，亀の方は 1 分間に 1 メートル進むとしましょう。アキレスが亀が最初にいた地点 P_1 に到達するには $100/100 = 1$ 分かかります．この間に亀は 1 メートル進み，地点 P_2 に到達します．アキレスは 1/100 分かかって地点 P_2 に到着します．この間に亀は 1/100 メートル進んで P_3 に達します．するとアキレスは $1/100 \times 1/100 = (1/100)^2$ 分かかって P_3 に到達します．この間に亀は $(1/100)^2$ メートル進んで P_4 に到達します．するとアキレスは $(1/100)^3$ 分かかって地点 P_3 から地点 P_4 に到達します．この間に亀は $(1/100)^3$ メートル進み地点 P_5 に到達します．アキレスが地点 P_4 から地点 P_5 へ到達するのにかかる時間は $(1/100)^4$ 分です．これを繰り返していくと地点 P_n に到達するまでにアキレスが走らなければならない時間 A_n 分は

$$A_n = 1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \left(\frac{1}{100}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

です．この和は(8) を使って

$$1 + \frac{\dfrac{1}{100} - \left(\dfrac{1}{100}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{100}} = \frac{1 - \left(\dfrac{1}{100}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{100}}$$

と計算することができます．この和で n をどんどん大きくしていくと $\left(\dfrac{1}{100}\right)^n$ は 0 に近づいていきます．したがって n をどんどん大きくしていくとアキレスが走らなければいけない時間は $\dfrac{100}{99}$ 分に近づいていきます．実はアキレスは $\dfrac{100}{99}$ 分後に亀に追いつくことが分かります． $\dfrac{100}{99}$ 分間にアキレスは $100 \times \dfrac{100}{99} = 101\dfrac{1}{99}$ メートル進

みます．この間に亀は $\frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}$ メートル進みます．$\frac{100}{99}$ 分後に亀が到達する地点はアキレスの出発点から $100 + 1\frac{1}{99}$ メートルですので，ここでアキレスと亀は一緒になり，アキレスは確かに亀に追いつきます．

ではゼノンの逆理のどこがおかしかったのでしょうか．この問題は別の形でも表現できます．長さが1のひもを半分に切り，切った一方をまた半分に切ります．さらに切った一方を半分に切ります．このことを次々と続けていくことは可能ですがいつまでたっても終わりません．無限に続くこの操作は，もちろん数学的に考えているだけで，現実には短くなってひもはそれ以上は切れなくなってしまいます．ですからこのような問題は考えることは意味がないということになります．アキレスと亀の問題でも $(1/100)^3$ メートルをアキレスが走ることはなく，実際は一またぎにさらに大きな距離を進むでしょう．こうした事実を指摘して数学は無意味だとする人たちがいます．これは数学に対する誤解です．ひもを切る問題でもアキレスと亀の問題でも，数学的な理想化を行って純粋に数学的な問題として考えると，そこに無限の問題が浮かび上がってくるのです．私たちは有限の時間では有限のことしかできません．それにも関わらず無限を考えることができます．有限と無限の間の越えがたい溝が人間にありますが，それでも無限を使った数学を発展させてきました．面積や瞬間速度（よく台風に関するニュースで瞬間最大風速という言葉が登場します）といった言葉の意味を考えると無限に直面します．私たちは無意識のうちに無限を含んだ言葉を使っているのです．様々な現象を数学を使って解析するときも無限の考えが必要になってきます．皆さんは微分や積分という言葉を聞いたことがあるかもしれません．微分や積分は直接に無限を考える必要があります．しかしその基礎は実は次に述べる実数の性質に基づいています．無限や既に上で述べた「限りなく近づく」という考えは最終的には数の性質に帰着されるのです．円周率を調べるためにも無限の考え方が必要になってきます．このことは後にお話しします．

7 実数

すでに $\sqrt{2}$ 有理数ではないことを示しました．$\sqrt{2}$ を無限小数で表すにはどうしたらよいのでしょうか．ここでは分数を使った方法を紹介しましょう．まず

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

であることに注意しましょう．これは $1 < 2 < 4$ から明らかでしょう．そこで

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}} \tag{9}$$

と書き直します．ここで分母が無理数の分数が登場しますが，その意味は $a \div b = \dfrac{a}{b}$ です．次に

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

であることを使うと式(9)は

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

と書けます．さらに $2 < \sqrt{2}+1 < 3$ よりこの式は

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt{2}-1)}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} \tag{10}$$

と書けます．この方法は何度も繰り返すことができて

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}} \tag{11}$$

が成り立ちます．さらに

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}}}}}}}}$$

などといくらでも続けることができます．これを無限回適用すると連分数が出てきますが今回はこれ以上は深入りしないことにします．(10) に $2 < \sqrt{2}+1 < 3$ を使うと

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} < \sqrt{2} < 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$$

を得て

$$1\frac{2}{5} < \sqrt{2} < 1\frac{3}{7}$$

という不等式が得られます．これから

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.43$$

が出てきます．(11) を使えばさらに精密な不等式

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}} < \sqrt{2} < 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

がでます．これを計算すると

$$1\frac{41}{99} < \sqrt{2} < 1\frac{29}{70}$$

となります．これより

$$1.4141 < \sqrt{2} < 1.41429$$

を示すことができます．

さて，有理数と無理数を一緒にしたものを実数と呼びます．英語では real number と言います．本当の数という意味合いが込められています．本当は複素数まで数を拡張してはじめて本当の数になるのですが，今回は時間の関係もあり複素数には触れることができません．

でた，無理数とは一体何のでしょうか．循環小数でない無限小数が無理数であるという答えがよく返ってきます．確かにそれでよいのですが，循環小数でない無限小数

$$\alpha = m.m_1m_2m_3\cdots m_nm_{n+1}\cdots$$

はどのような数を決めているのだと問われたとき，どのように答えたらよいのでしょうか．循環小数の場合を参考にすれば

$$a_n = m.m_1m_2\cdots m_n$$

という有限小数（したがって有理数）を考え，n をどんどん大きくしていったとき近づく数が無理数 α だと答えることになるでしょう．循環小数の場合は α に当たる数が分数として最初からありました．ところが，今度は α は最初からあるとは言い難いのです．むしろ有理数 a_n で n を大きくしていったとき近づく数としか言いようがありません．実際，このような数が本当にあるのですかと聞かれるとどう返事してよいのか分からなくなります．実は有理数の列 $\{a_n\}$ が無理数 α を決める（定義する）と考えるのです．このように有理数の列が限りなく近づくときの極限として無理数を捉えることが大切になります．これと違った無理数の定義もありますが，いつも有理数を使って無理数を定義する必要があり，本質的にはここでの定義と同値になります．自然に存在すると思っていた実数が実はそんなに簡単に定義できないことに驚かれるかもしれませんが，実数の持つ本当の不思議さが分かるようになったのは19世紀になってからでした．実数の持つ性質を深く考察する過程で様々なことが分かりました．かっては大学での微積分の授業は実数論から始まりました．当たり前と思っていたことが実は当たり前でないことが分かり，大いに驚いたものでした．現在では難しいからと授業で実数論を除外するところが増えています．二千年以上もかかって人類が見出した智恵を学ばないことは実は大きな損失だと思っています．ここでは実数について充分に話すことはできませんが無限と関連して奥深い世界があることに気付いて頂けれることを希望します．

実数は $\sqrt{2}$ のようになじみ深いものばかりでなく，よく分からないものもたくさんあります．皆さんにもなじみ深い円周率について述べてこの話を終わりたいと思います．

8　円周率

ここでは昔からよく知られている数円周率 π について簡単に触れることにします．円周率の計算は電卓やコンピュータを使って行うことが可能です．ここでは円周率を考えることがどのような数学と結びついているかを知るために少し難しい数学も恐れずに使うことにします．

今回の学習指導要領で円周率が3になると大騒ぎになりました．旧文部省も文部科学省も円周率は3.14であると主張し，新しい教科書も円周率は3.14と書いてあります．ところが小数点以下2桁の小数の計算は教科書で扱いませんので，円周率を3.14とした計算は電卓を使わないとできないことになってしまいます．たとえば半径が5の円の面積は

$$5 \times 5 \times 3.14 = 78.5$$

ですが，これは電卓を使わなくても $10 \div 2 = 5$ を使えば

$$10 \times 10 \times 3.14 \div 4 = 314 \div 4 = 78.5$$

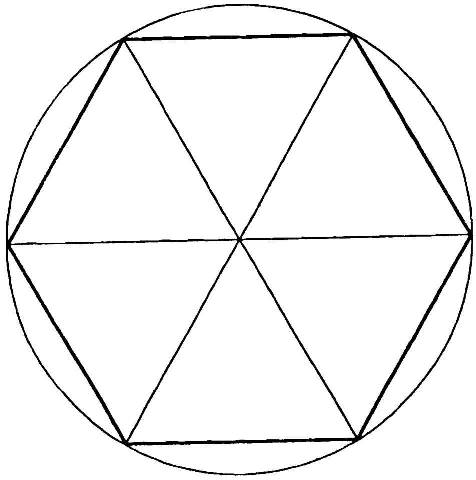

図 11: 円と正六角形

と簡単に計算できます．こうした工夫を教えることのない教科書を強要する新学習指導要領は数学的な考え方を伝えることができない欠陥品でしかありません．

円周率がどれくらいの値になるかは正六角形を考えることによって分かります．半径 1 の正三角形を 6 個集めて正六角形をつくることができます．正六角形の中心を中心とする半径 1 の円を描くと正六角形の頂点を通る円が描けます．正六角形の外周の長さは 6 になります．この長さと円周とを比較するには一つの正六角形の一辺と円弧を比較すればすぐに分かります．

二点を結ぶ曲線のうちでいちばん短いのは直線であることを使えば円弧の方が正六角形の一辺より長いことが分かります．円の直径は 2 であり，円周率を π と記すと

$$2\pi > 6$$

が分かりますので

$$\pi > 3$$

が分かります．円周率をおおよそ 3 とすることは円の変わりに円に内接する正六角形を円の近似と考えることに対応します．実際の生活ではこれで十分な場合もありますが，図からわかるように不十分な場合もあります．

円周率の計算は昔から円に内接する正多角形と外接する正多角形を使って計算する方法が知られていました．アルキメデスの計算は有名です．かれは円に内外接する正 96 角形を考えることによって

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

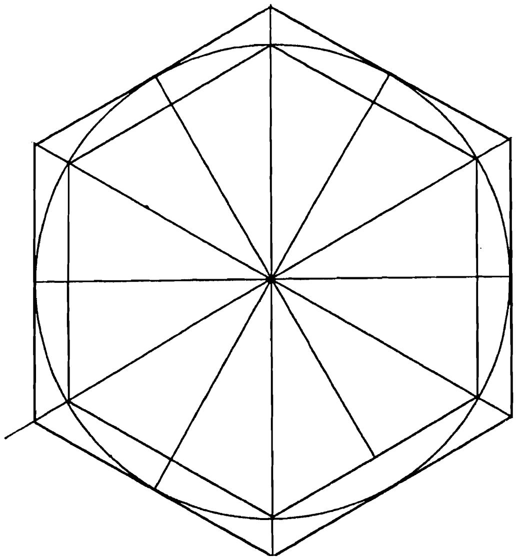

図 12: 円に内外接する正 n 角形

を示しました.

少し一般的になりますが半径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さを $2p_n$, 外接する正 n 角形の周の長さを $2P_n$ と書くことにします. すると半径 1 の円に内接する正 n 角形の一辺の長さは $2p_n/n$, 半径 1 の 円に外接する正 n 角形の一辺の長さは $2P_n/n$ になります.

このとき

$$P_n > \pi > p_n$$

が成り立ちます. 上で正六角形で述べたことと同じ理由により $2\pi > 2p_n$ が成り立つことはすぐ分かります. 一方, 半径 1 の円に外接する正 n 角形の面積は図 13 からすぐわかるように P_n になります. この外接正 n 角形の面積より半径 1 の円の面積 π が小さいので

$$P_n > \pi$$

が得られます. さらに内接正 n 角形から内接正 $2n$ 角形を描くためには円の中心から内接正 n 角形の一辺へ垂線を下ろしその延長と円との交点と内接正 n 角形の頂点とを結ぶことによって正 $2n$ 角形を描くことができます. この作図より

$$p_{2n} > p_n$$

が分かります. 外接正 n 角形の面積より外接正 $2n$ 角形の面積は小さいので

$$P_n > P_{2n}$$

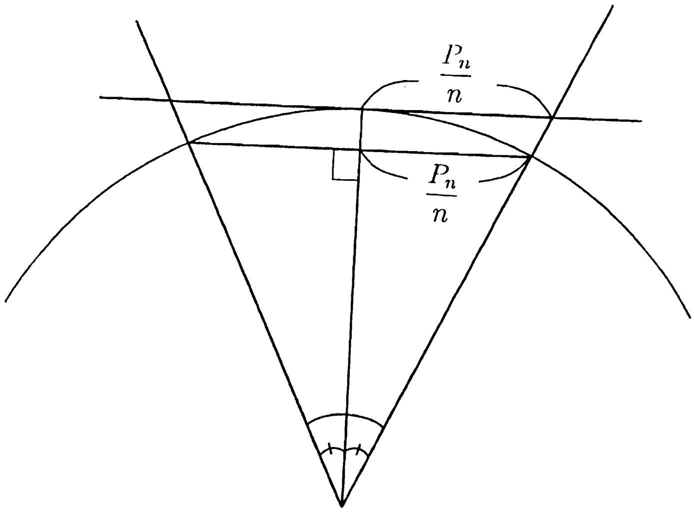

図 13: 円に内外接する正多角形の一辺

が分かります．これから

$$P_n > P_{2n} > P_{4n} > \cdots > \pi > \cdots p_{4n} > p_{2n} > p_n$$

を得ます．$p_6 = 3$ ですが，正三角形の相似から $P_6 = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ が分かります．

p_n と p_{2n} との間に，また P_n と P_{2n} との間には次の関係があります．

$$p_{2n}^2 = \frac{2p_n^2}{1+\sqrt{1-p_n^2/n^2}} \quad (12)$$

$$P_{2n} = \frac{2P_n}{1+\sqrt{1+P_n^2/n^2}} \quad (13)$$

最初の等式は次のようにして求めることができます．

図 14 で BC は内接正 n 角形の一辺であり，BD は内接正 $2n$ 角形の一辺であるとします．AB は直径，線分 DA と線分 BC の交点を E とします．弧 CD 上の円周角として

$$\angle EBD = \angle DBC = \angle DAC$$

が成り立ちます．また弧 BD と弧 CD は長さが等しいので

$$\angle BAD = \angle DAC = \angle EAC$$

が成り立ち，上の等式と合わせて

$$\angle BAD = \angle EBD$$

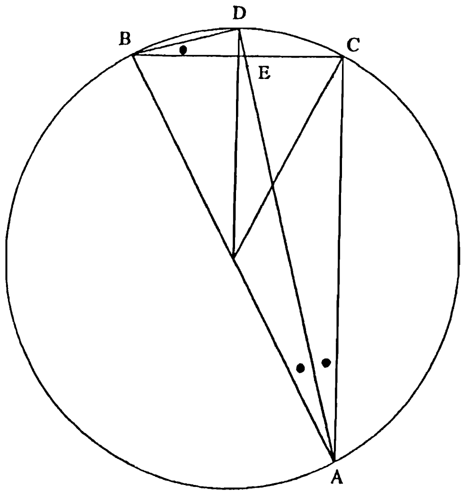

図 14: p_n と p_{2n} との関係

が成り立つことが分かります．三角形EBDと三角形BADとは$\angle EDB = \angle BDA =$ 直角, $\angle EBD = \angle BDA$ より相似であることが分かります．したがって

$$\frac{DB}{DA} = \frac{BE}{AB}$$

が成り立ちます．これより等式

$$\frac{AB}{DA} = \frac{BE}{DB}$$

を得ます．同様に三角形BDAと三角形ECAとは$\angle BDA = \angle ECA =$ 直角, $\angle BAD = \angle EAC$ より相似になり

$$\frac{CA}{DA} = \frac{EC}{BD}$$

が成り立ちます．この二つの等式より

$$\frac{AB + CA}{DA} = \frac{BE + EC}{DB} = \frac{BC}{DB}$$

が導かれます．

$$AB = 2, \quad BC = \frac{2p_n}{n}, \quad DB = \frac{2p_{2n}}{2n} = \frac{p_{2n}}{n}$$

と三平方の定理を使うと

$$\frac{2p_n}{p_{2n}} = \frac{BC}{DB} = \frac{2 + \sqrt{4 - BC^2}}{\sqrt{4 - BD^2}} = \frac{2 + \sqrt{4 - 4p_n^2/n^2}}{\sqrt{4 - p_{2n}^2/n^2}}$$

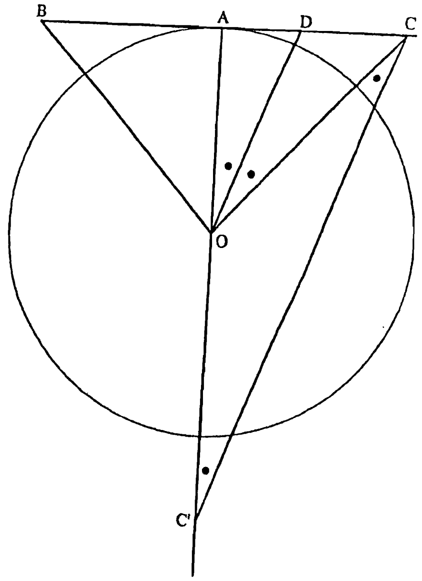

図 15: P_n と P_{2n} との関係

を導くことができます．この等式を 2 乗して変形することによって

$$p_{2n}^2 = \frac{2p_n^2}{1+\sqrt{1-p_n^2/n^2}}$$

を導くことができます．この式より p_n が分かれば p_{2n} も計算できることが分かります．もちろん平方根をとる必要があるので筆算を行うことは大変ですが，今日では電卓を用いれば簡単に計算することができます．

三角関数を使えば

$$p_n = n\sin\frac{360^\circ}{2n} = n\sin\frac{180^\circ}{n}$$

であることが分かりますので，倍角の公式を使えば上と同じ等式を導くことは難しいことではありません．

次に外接正多角形を考えましょう．

図 15 で BC を点 A で半径 1 の円に接する外接正 n 角形の一辺とします．線分 OD は $\angle AOC$ の二等分線とすると AD は外接正 $2n$ 角形の一辺の半分になります．点 C を通り OD に平行な直線を引き直線 AO との交点を C' とします．すると OD と CC' が平行なので

$$\angle ADC = \angle CC'O$$

となります．一方

$$\angle OC'C + \angle OCC' = \angle AOC = 2\angle AOD$$

が成り立ちますので

$$\angle OC'C = \angle OCC'$$

となり三角形$OC'C$は二等辺三角形であることが分かり，$OC' = OC$が分かります．一方三角形AODと三角形$AC'C$は相似ですので

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AO}{AC'}$$

が成り立ちます．これより

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AC'}$$

が成り立つことが分かります．これより

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AO + OC'} = \frac{AC}{AO + OC} = \frac{AC}{AO + \sqrt{AO^2 + AC^2}}$$

が導かれます．ところで

$$AO = 1, \quad AC = \frac{P_n}{n}, \quad AD = \frac{P_{2n}}{2n}$$

ですので，上の等式より

$$\frac{P_{2n}}{2n} = \frac{P_n/n}{1 + \sqrt{1 + (P_n/n)^2}}$$

が成立し，この式を整理して

$$P_{2n} = \frac{2P_n}{1 + \sqrt{1 + (P_n/n)^2}}$$

を得ます．

三角関数を使えば

$$P_n = n \tan \frac{180^\circ}{n}$$

ですので，この等式も倍角の公式を使って導くことができます．$p_6 = 3$, $P_6 = 2\sqrt{3}$ですので，あとは電卓を使って計算できます．ただ注意しなければならないのは電卓の計算は近似値であり誤差を含みますのでp_{2n}, p_{4n}, p_{8n}と計算を進めて行くたびに誤差が大きくなっていく点です．このことを避けるためには小数点以下の桁数を大きくとって計算を行うか，できる限り平方根が入ったままの形で計算して最後に平方根を開くことです．小数点以下5桁で四捨五入した値を記しておきましょう．

n	p_n	P_n
6	3.0000	3.4642
12	3.1058	3.2154
24	3.1326	3.1597
48	3.1393	3.1461
96	3.1410	3.1428

この計算によって

$$3.141 < \pi < 3.1428$$

であることが分かります．

江戸時代の和算家は円に内接する正方形から計算を始めています．このときは $p_4 = 2\sqrt{2}$ です．彼らは内接多角形しか考えませんでしたので円周率の正確な値を上のように論理的に求めることはできませんでした．しかし，彼らは求めた p_n からさらに正確な数値を求める方法を知っていました．関孝和は内接正 131072 角形まで考え $(131072 = 2^{17})$ $p_{131072} = 3.14159265328892 7759\cdots$ まで計算しました．そして，得られた値をもとに

$$\frac{p_{4n} - p_{2n}}{p_{2n} - p_n}$$

がほぼ 1/4 に等しいことを見いだしました．これは数列 $a_n = p_{2n} - p_n$ が公比が 1/4 の等比級数に近いことを意味します．簡単のために

$$r_s = \frac{p_{2^{s+1}k} - p_{2^s k}}{p_{2^s k} - p_{2^{s-1}k}}, s = 1, 2, 3, \cdots$$

と置くと

$$\begin{aligned} p_{2^m k} &= p_k + (p_{2k} - p_k) + (p_{4k} - p_{2k}) + \cdots + (p_{2^m k} - p_{2^{m-1}k}) \\ &= p_k + (p_{2k} - p_k)(1 + r_1 + r_1 r_2 + \cdots + r_1 r_2 \cdots r_{m-1} \end{aligned}$$

と書くことができます．k が大きいときは r_k は 1/4 にほとんど等しいので $r_k = 1/4$ と置くと上の式は

$$p_k + (p_{2k} - p_k)\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}\right) = p_k + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m}{1 - \frac{1}{4}} \cdot (p_{2k} - p_k)$$

となります．ここで $m \to \infty$ として

$$p_k^{(1)} = p_k + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \cdot (p_{2k} - p_k) = \frac{4p_{2k} - p_k}{3}$$

と置きます．こうすると $p_k^{(1)}$ は k が大きくなるとき p_k より早く円周率に収束することが分かります．関孝和はこのことを知っていたようですが，かれは 1/4 を直接使わずに

$$r = \frac{p_{2^{17}} - p_{2^{16}}}{p_{2^{16}} - p_{2^{15}}}$$

を使い，円周率として

$$p = p_{2^{16}} + \frac{p_{2^{17}} - p_{2^{16}}}{1 - r}$$

を使い 3.14159265349 を得ています．

もし関孝和がさらに

$$\frac{p_{4k}^{(1)} - p_{2k}^{(1)}}{p_{2k}^{(1)} - p_{k}^{(1)}}$$

を考えていたらさらによい円周率を見いだすことができたはずです．このことを実行したのは関孝和の弟子であった建部賢弘でした．ただし，建部賢弘は直接に p_n を考えずに p_n^2 を考え，上と類似の方法で正接正 1024 角形までの計算を行い小数点以下 39 桁まで正しい円周率を求めました．

ここでは上のアルキメデスの計算を使って見ましょう．

$$\frac{p_{4k}^{(1)} - p_{2k}^{(1)}}{p_{2k}^{(1)} - p_{k}^{(1)}}$$

は 1/16 に近い値になります．そこで上と同様の考えを使い

$$\begin{aligned} p_k^{(2)} &= p_k^{(1)} + (p_{2k}^{(1)} - p_k^{(1)})\left(1 + \frac{1}{16} + (\frac{1}{16})^2 + \cdots\right) \\ &= p_k^{(1)} + (p_{2k}^{(1)} - p_k^{(1)}) \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{16}} \\ &= \frac{16p_{2k}^{(1)} - p_k^{(1)}}{15} \end{aligned}$$

と置きます．すると

$$\frac{p_{4k}^{(2)} - p_{2k}^{(2)}}{p_{2k}^{(2)} - p_{k}^{(2)}}$$

は 1/64 に近い値になります．そこで

$$p_k^{(3)} = \frac{64p_{2k}^{(1)} - p_k^{(1)}}{63}$$

と置きます．そこで $p_k^{(3)}$ を計算してみましょう．

n	p_n	$p_n^{(1)}$	$p_n^{(2)}$	$p_n^{(3)}$
3	2.59807621			
		3.13397460		
6	3.00000000		3.14158006	
		3.14110472		3.14159265
12	3.10582854		3.1459245	
		3.14156197		
24	3.13262861			

驚くほど精密な円周率の値が出てくることが分かります．もう少しデータを記しておきます．

$$
\begin{aligned}
p_{96} &= 3.14103195089050963811135292645966010703641221616 28\\
p_{284} &= 3.14152858295447339339465735440837689618012382367 77\\
p_{24}^{(1)} &= 3.14159073296874354379294593844731617065054181398 96\\
p_{48}^{(1)} &= 3.14159253350505711510342162821007307966509942509 62\\
p_{12}^{(2)} &= 3.14159265045788858803558207153317358117368280500 92\\
p_{24}^{(2)} &= 3.14159265354081135319078667419425687359940326583 67\\
p_{6}^{(3)} &= 3.14159265357789237103628222962886786346610133761 99\\
p_{12}^{(3)} &= 3.14159265358974663517737722344284549728870041600 86\\
p_{3}^{(4)} &= 3.14159265360155102866912441856822988483288912385 42\\
p_{6}^{(4)} &= 3.14159265358983997583990553048075083298809095993 29\\
p_{3}^{(5)} &= 3.14159265358979405014253604464511366023575841811 36\\
p_{48}^{(5)} &= 3.14159265358979323846264414696498621821635791134 63\\
\pi &= 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51
\end{aligned}
$$

この理由を説明するには大学初年級の微積分の知識が必要になります．興味があることですので少し難しいのですが説明をしてみましょう．そのためには角度の計り方をこれまでの「度」ではなく 360° を 2π ラジアンとする弧度法を使う必要があります．半径 1 の円に内接する正 $4n$ 角形の周の長さの半分 p_n は弧度法を使うと

$$p_n = n\sin\frac{\pi}{n}$$

となります．また半径 1 の円に外接する正 n 角形の周の半分は

$$P_n = n\tan\frac{\pi}{n}$$

と書けます．弧度法を使うと三角関数は次の形にテイラー展開することができます．

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^5}{315} + \cdots
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
p_n &= \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \frac{\pi^7}{7!n^6} + \cdots && (14)\\
p_{2n} &= \pi - \frac{1}{4}\frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{1}{16}\frac{\pi^5}{5!n^4} - \frac{1}{64}\frac{\pi^7}{7!n^6} + \cdots && (15)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます．すると

$$4p_{2n} - p_n = 3\pi - \frac{3}{4}\frac{\pi^5}{5!n^4} + \frac{15}{16}\frac{\pi^5}{5!n^6} + \cdots$$

が成り立ちます．p_n は n^{-2} のオーダーで π に近づきますが，$p_n^{(1)} = \dfrac{4p_{2n} - p_n}{3}$ は n^{-4} のオーダーで π に近づきます．

このように数列が n の負べきで展開できているときにその展開をもとにさらに収束が早くなる数列を作って数列の極限値を求める方法を Richardson 加速と言います．建部賢弘はこうした加速法が西洋で見いだされる前に加速法を使っていました．

9　円周率は無理数

円周率は無理数であり，したがって循環小数ではない無限小数で表されることは数学的にきちんと証明できることです．この事実はコンピュータでどれだけの桁の円周率を計算しても示すことはできません．ここでは I. Niven による短い証明を説明しましょう（Ivan Niven : A simple proof that π is irrational, Bull. AMS, **53**(1947), p.509.）微積分を使う必要がありますが，円周率をめぐる数学はそれだけの深さを持っていると見ることもできます．

証明は $\sqrt{2}$ のときと同様に背理法を使います．円周率 π は有理数であると仮定しましょう．そこで自然数 p, q によって

$$\pi = \frac{q}{p}$$

と書けたと仮定しましょう．そこで

$$f(x) = \frac{x^n(q - px)^n}{n!}$$

と置きます．ここで n は自然数とします．後に n は十分大きな自然数をとりますが，とりあえずは n に直接関係しない $f(x)$ の性質を調べます．まず

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} A_j x^{n+k}$$

と書けることに注意します．ここで A_j は整数です．したがって $j < n$ のとき，$f(x)$ の j 階導関数 $f^{(j)}(x)$ に対して $f^{(j)}(0) = 0$ となります．一方，$j \geq n$ であれば

$$f^{(j)}(0) = \frac{j!}{n!}A_{j-n} = (n+1)(n+2)\cdots j \cdot A_{j-n}$$

は整数となります．そこで

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

と置くと $F(0)$ は整数であることが分かります．さらに $f(x)$ の定義より

$$f(x) = f(q/p - x)$$

が成り立ちますので $f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}(q/p - x)$ となり，$f^{(j)}(\pi) = (-1)^j f(0)$ の整数となります．このことが大切な役割をします．

さて $F(x)$ の定義より

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

となり

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) - F(0)$$

を得ます．すなわち，この積分の値は整数です．

ところで，$0 < x < \pi$ では $0 < \sin x < 1$ であり，また $\pi = q/p$ より $0 < x < \pi$ では $0 < q - px < q$ となります．したがって

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n q^n}{n!} = \frac{(\pi q)^n}{n!}$$

となります．ところで $n!$ は n が大きくなるにつれて $(\pi q)^n$ よりはるかに大きくなります．このことは後に証明します．いずれにせよ，上の不等式を使うと

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \int_0^\pi \frac{(\pi q)^n}{n!} dx = \frac{\pi^{n+1} q^n}{n!}$$

となり，n が十分大きければ

$$\frac{\pi^{n+1} q^n}{n!} < 1$$

となることが分かります．この不等式が成り立つように n を選ぶと

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$$

が成り立ちますが，一方上で示したように積分値は整数です．これは矛盾です．この矛盾は円周率 π を有理数と仮定したことにあります．したがって円周率 π は無理数でなければなりません．

最後に正の数 a に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

を証明しましょう．$a < m$ となる自然数 m を一つ固定します．すると

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{n!} &< \frac{m^n}{n!} = \frac{m^m}{m!}\left(\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m}{m+2}\cdots\frac{m}{m+(n-m)}\right) \\
&< \frac{m^m}{m!}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{n-m}{m}}
\end{aligned}$$

が成り立ちます．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{n-m}{m}}=0$$

が成り立ち，一方 $\dfrac{m^m}{m!}$ は決まった数ですので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

が成り立つことが分かります．

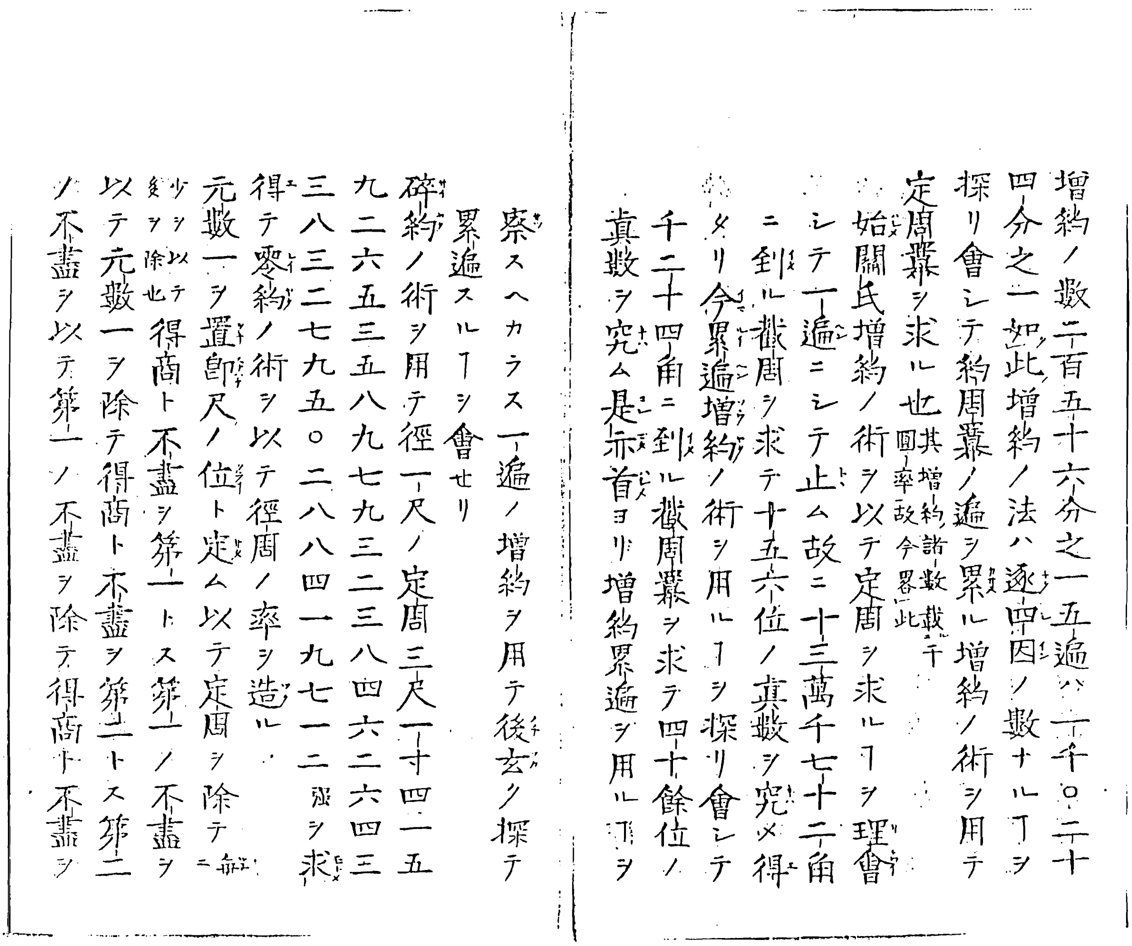
増約ノ數二百五十六分之一五遍ハ一千〇二十
四分之一如此増約ノ法ハ逐中因ノ數ナル丁ヲ
探リ會シテ約周纍ノ遍ヲ累ル増約ノ術ヲ用テ
定周纍ヲ求ル也其増約諸數載于圓率故今畧此
始關氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ル丁ヲ理會
シテ一遍ニシテ止ム故ニ十三萬千七十二角
ニ到ル截周ヲ求テ十五六位ノ眞數ヲ究メ得
タリ今累遍増約ノ術ヲ用ル丁ヲ探リ會シテ
千二十四角ニ到ル截周纍ヲ求テ四十餘位ノ
眞數ヲ究ム是示首ヨリ増約累遍ヲ用ル丁ヲ
察スヘカラス一遍ノ増約ヲ用テ後玄ク探テ
累遍スル丁ヲ會セリ
碎約ノ術ヲ用テ徑一尺ノ定周三尺一寸四一五
九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三
三八三二七九五〇二八八四一九七一二強ヲ求
得テ零約ノ術ヲ以テ徑周ノ率ヲ造ル
元數一ヲ置即尺ノ位ト定ム以テ定周ヲ除テ二解
少ヲ以テ除也得商ト不盡ヲ第一トス第一ノ不盡ヲ
以テ元數一ヲ除テ得商ト不盡ヲ第二トス第二
ノ不盡ヲ以テ第一ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ

図 16: 建部賢弘著「綴術算経」

（うえの けんじ，京都大学大学院理学研究科）