球面三角形をはりあわせると

東大数理・古田幹雄

概 要

空間の曲がり方には正とゼロと負の可能性があります．空間の曲がり方がプラスマイナス無限大に発散しているブラックホールのような点は，特異点と呼ばれます．講演では，正の定曲率をもった特異点付の曲面を題材とします．球面三角形をいくつか貼り合わせてできる角のある図形のことです．

実はこうした図形は２，３年前に，私自身が研究の途中に出会ったものです．球面上に角が３箇所ある曲面の場合にはこうした図形を分類することができました．でも，角が４箇所になると分類できていません．素朴な対象ですが，現代的な幾何学と深く関係しています．まだまだわからないことだらけなので，もしこの先を考えてくださる方がいれば，大歓迎です．

1 はじめに

2000年の暮に，高校生を主な対象とする「湘南数学セミナー」において「球面三角形をはりあわせると」というタイトルで二日間にわたって話をさせていただきました[1]．２時間程度の話を計４回行うペースでした．上の「概要」はセミナーの案内の文章です．以下に述べるのは，そのときの様子の記録です．

参加者は計20数名．内訳は中学生が数名，社会人が２名，大学以上の学生等が２名，あとの大多数は高校生でした．

題材を選んだ背景について少し説明します．

Riemann 面上の確定特異点付射影接続という概念の数学的扱いを，私は10年ほど前岡本和夫氏，岩崎克則氏の研究を学んだときに知りました．[2]特に，トーラス等の複素構造の変形を伴う場合には，河井真吾氏の先駆的な仕事が産まれるのを端で見ていました．また，affine 構造に関する平行した考察としては，橋本義武・大場清の両氏が複素平面のはりあわせを利用して扱う理論を構成しつつある時期でした．その後，数年前に梅原雅顕氏から，モノドロミーが SO(3) に含まれる場合には，射影接続が３次元双曲空間内の CMC-1 曲面と関係していること

[1]湘南国際村センターにて．2001年12月23日14:00〜24日13:00

[2]共形場理論の定式化に射影接続が現れることを聞いたのは，それより前だったかもしれません．

を聞き及びました．これらを受けて，服部善信氏は修士論文において，このモノドロミーに制限がある場合の射影接続の分類問題を，球面三角形のはりあわせとして初等的に扱える場合があることを示しました．

射影接続の幾何の長い歴史や主流の研究からみると，これらはエピソードのようなものかもしれません．しかし，私が個人的に接してきたこうした経過の一端を，時間的順序とは逆さまの展開によって解説すると，高校生に初等的な題材の延長上に現代数学の世界が広がっていることを感じてもらえるのではないかと考えました．

話の前半の目標は，球面三角形の構成と分類を通じて図形を手でいじって，イメージを豊かにしてゆくことです．

話の後半の目標はトーラス等の複素構造の変形を伴う場合の考察で，変形の自由度はどのくらいあるか，というモジュライ空間の概念に通じる問題に，肌で親しむことです．

そして最後に，実は球面三角形を貼り合わせた図形は，複素変数の微分方程式（射影接続）を用いて表現できるんだ，ということをお話としてスケッチしました．

２日間の間，４人の院生等の方々に手助けを御願いしました．参加者たちに彼等のことをなんと呼んでもらったらいいか迷いましたが，チューターと呼ぶことにしました．

話の概要をあらかじめまとめて配ろうと思っていたのですが，時間的余裕がなくてできませんでした．窮余の策として，題材として取り上げたいトピックを演習問題の形にして配りました．結果的にこれはおもいがけずうまくいきました．

前半は演習問題をやりながら進むことができましたが，後半は一方的にまくし立てることとなりました．以下の記録では，前半のやりとりを中心にまとめました．

記録の後に，参加者に配った演習問題集と，参加者の幾人からかメールでもらった感想を置いてあります．

この記録をまとめるに当たって，参加者のひとりである青木藍さんのノートを参考にさせてもらいました．また感想のメールの仲介を吉田隆彦君にしてもらいました．御二人と共に，感想をよせてくださった参加者の方々に感謝いたします．

2　話の前に

[演習問題集を配る．参加者，チューター，講師の自己紹介を全員でする．昨年来たのでまた来た，友達に誘われた，というグループもあったが，ほとんどの人は初めてとのことであった．

参加者全体を最初にたまたま座った場所に応じて４つの班にわけ，チューターひとりづつに班長（？）になってもらう．後で述べる「問」では，数分から十数分の時間をとって，班単位で議論してもらう．チューターは特に司会をとるわけではないが，それを見守り，質問を受ける役割をしてもらう．話を始める前に，どんな質問をしてもいいこと，もし話がわからないとき，多くの場合は話手の責任であると思うと説明する．]

3　なにを考えたいのか

この話で考えたいのは，ちょっと変わった図形です．それがどんなものであるかの直観的な説明します．まず，半径１の球面を考えてください．それが紙のような素材でできていると想像してみます．この紙でできた球面は，はさみで切ることができ，折り曲げて糊で貼ることもできます．

球面上に線を描くときには，大円（の一部）だけを考えます．だから，球面上に描かれた三角形や四角形というのは，すべての辺が，大円の一部であるものとします．

これから考えたいのは，球面三角形などとともに，それらを貼り合わせてできる次のような図形です．

（１）北極と南極を結ぶふたつの大円（の半分）で球面を切りとると,「二角形」が得られる．その両辺を貼り合わせてできる図形.（図１）

（２）球面上の「球面三角形」をひとつ考える．それを裏返しにした球面三角形をもうひとつとってくる．両者の対応する辺同士を貼り合わせてできる図形.（図２）

これらの図形には「角」があります．しかし，角以外の点（のまわり）は貼り合わせのときにちょっと歪んでいるかもしれないけど，その歪みを無視すると（本来の）球面上の普通の点（のまわり）と同じく，滑らかです．

（１）はふたつの角があるつぶれかけた球面のような図形である．

（２）は３つの角があるつぶれかけた球面のような図形である．

他の例として次のようなものもあります．

（３）球面上の「長方形」の向かい合った辺をはりあわせた図形．はりあわせてえられるものはひとつの角のあるドーナツのような形をしている.（図３）

滑らかな点のまわりをぐるりとまわる角度は 2π です．しかし，角のまわりの角度は，2π ではないことに注意してください．

上の（１）の例では，ふたつの角のまわりの角度は等しい．

上の（２）の例では，球面三角形の頂点の角度を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とおくと，３つの角のまわりの角度は $2\theta_1, 2\theta_2, 2\theta_3$ である．

上の（３）の例では，長方形のひとつの頂点の角度を θ とすると，ドーナツの形の図形の角の周りの角度は 4θ になる．

これから，しばらくの間，球面三角形について考えてみます．そのあと，それを貼り合わせてできる，角のある（つぶれかけた）球面や，角のあるドーナツや，もっと一般の図形について考えてみます．

球面三角形をはりあわせると（古田幹雄）

図1
（1）

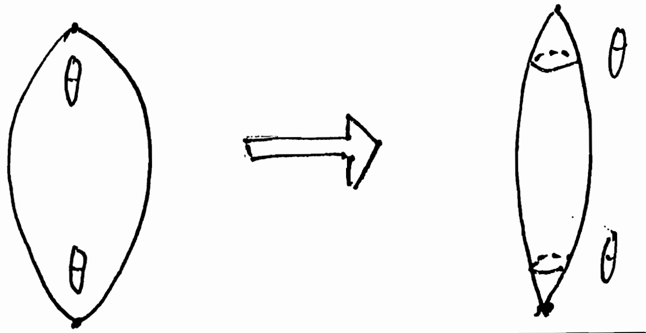


図2
（2）

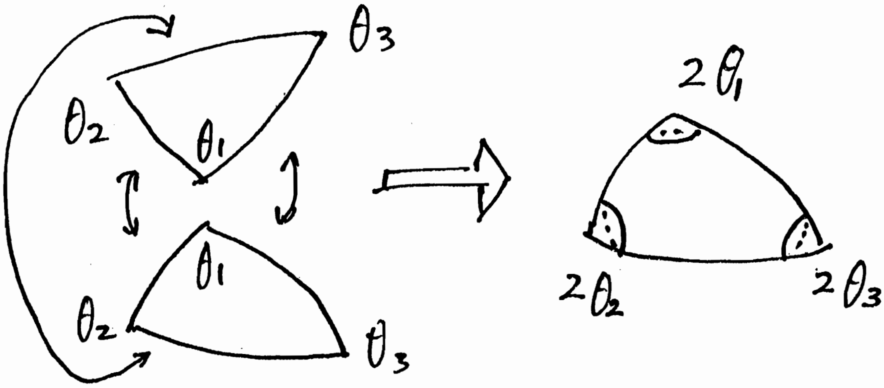


図3
（3）

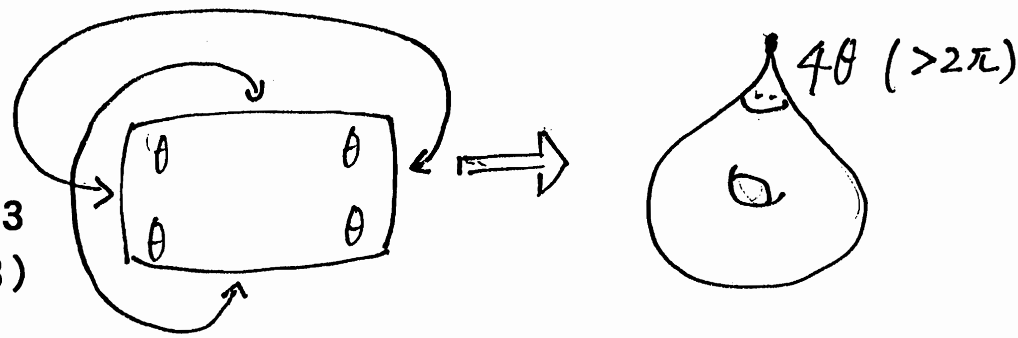
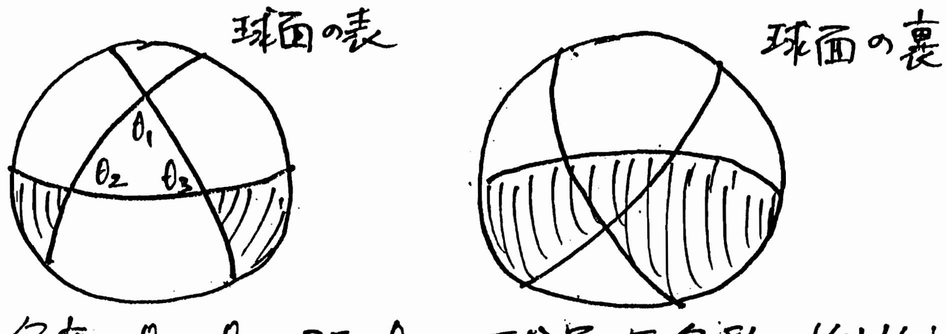


図4



角度 θ_2, θ_3, $2\pi-\theta_1$ の球面三角形（斜線部）

4　球面三角形を作ってみよう

問：球面上に角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の球面三角形が存在するためが存在するための条件は

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 < 1$$

であることを示せ．

普通の平面上の三角形では，どの角度も 0 より大きく π より小さくなります．これまで，角度が $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の球面三角形というとき，これらの角度も 0 より大きく π より小さいものを念頭において図に書いてきました．

でも，この球面三角形の補集合に注目すると，補集合は，3 つの頂点と 3 つの辺をもつ図形で，その角度は角度が $2\pi-\theta_1, 2\pi-\theta_2, 2\pi-theta_3$ になっています．

これからは球面三角形というとき，こうしたものも考えることにします．また，角度が π の頂点というのも考えることにします．

問：さらに角度が $2\pi-\theta_1$, θ_2, θ_3 あるいは角度が $2\pi-\theta_1$, $2\pi-\theta_2$, θ_3 である球面三角形も存在することを示せ．（図 4）

ここでもっと想像をたくましくして，角度が 2π より大きな球面三角形を考えることはできるでしょうか？

実際にそうした球面三角形を作ってみます．その準備として次のふたつのタイプの球面二角形を考えます．

（I 型）ふたつの頂点の角度がともに $0<\theta<2\pi$ であり，ふたつの辺の長さは π である．(図 5)

（II 型）ふたつの頂点の角度はともに 2π であり，ふたつの辺の長さは $0<l<2\pi$ である．(図 6)

（I 型）は，前にのべた例（1）で既にでてきたものです．(II 型）は，要するに，球面に，長さ l の大円弧の切りこみをいれたものです．

さて，球面上に（自己交叉なしに描かれたこれまで考えてきたような）球面三角形があったとします．その頂点の角度を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とおき，それらと向かい合った辺の長さを l_1, l_2, l_3 とおきます．以下，この図形を Δ と略記します．

Δ の長さ l_1 の辺の部分に，(II 型）で 2 辺が l_1 の球面二角形を貼り合わせてみます．(図 7）すると，3 辺の長さをかえずにその辺の両側の 2 つの角度を 2π 増やした新しい球面三角形が得られます．ただし，この新しい球面三角形は，球面上に書こうとすると，球面を 1 重以上に覆っている部分があります．しかし，このような図形も，これからは考えることにします！

上の操作は何回でも繰り返すことができます．(図 8)

・長さ l_1 の辺に m_1 個の（II 型）球面二角形をはりあわせ，

・長さ l_2 の辺に m_2 個の（II 型）球面二角形をはりあわせ，

・長さ l_3 の辺に m_3 個の（II 型）球面二角形をはりあわると，

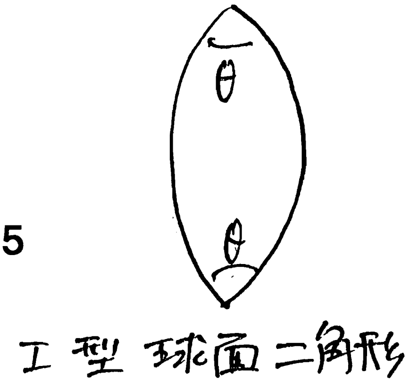

θ
θ
I 型 球面二角形

図 5

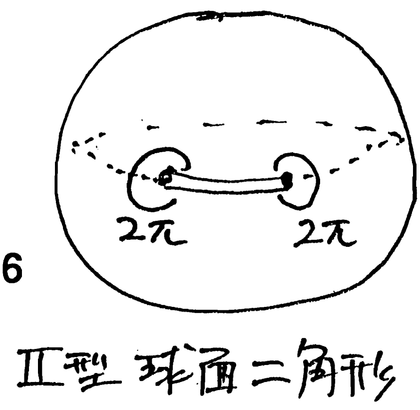

2π
2π
II 型 球面二角形

図 6

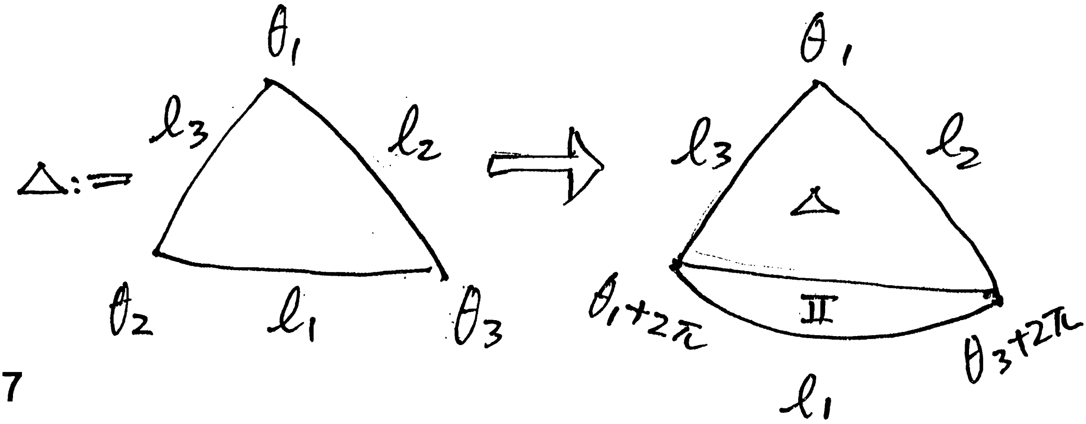

θ_1
l_3
l_2
$\Delta :=$
θ_2
l_1
θ_3
θ_1
l_3
l_2
Δ
II
$\theta_1+2\pi$
$\theta_3+2\pi$
l_1

図 7

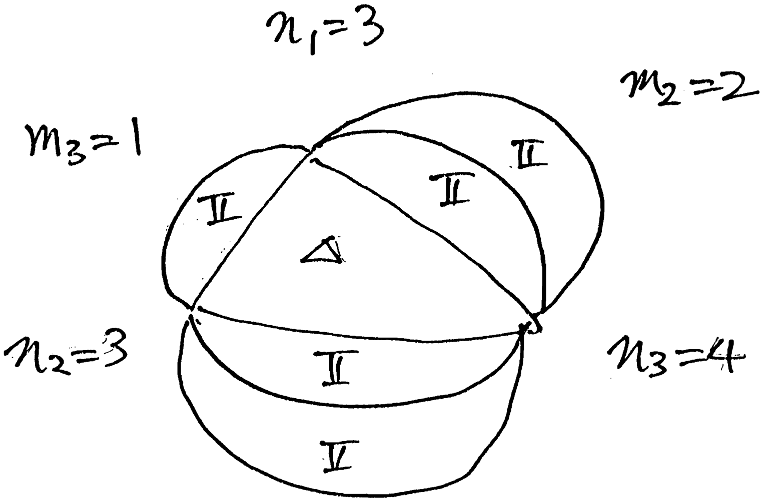

$n_1=3$
$m_2=2$
$m_3=1$
II
II
II
Δ
$n_2=3$
$n_3=4$
II
II
$m_1=2$

図 8

できあがった球面三角形の頂点の角度は

$$\theta_1 + 2\pi(m_2 + m_3), \quad \theta_2 + 2\pi(m_3 + m_1), \quad \theta_3 + 2\pi(m_1 + m_2),$$

となります．ここで次の問を考えてみよう．

問：0 以上の整数 n_1, n_2, n_3 が，３角不等式を充たすと仮定する（等号も許す）．このとき，頂点の角度が

$$\theta_1 + 2\pi n_1, \quad \theta_2 + 2\pi n_2, \quad \theta_3 + 2\pi n_3,$$

であるような球面三角形を作れ．

もし，$n_1 + n_2 + n_3$ が偶数のときには，$n_1 = m_2 + m_3$, $n_2 = m_3 + m_1$, $n_3 = m_1 + m_2$ となる 0 以上の整数 m_1, m_2, m_3 が存在するので，上の構成によって答えは Yes です．

実は，$n_1 + n_2 + n_3$ が奇数のときには，(II 型) の球面二角形のかわりに，次のような球面二角形を用いれば，やはり求める球面三角形を構成することができます．

(III 型) ふたつの頂点の角度はともに π であり，ふたつの辺の長さは $l, 2pi - l$ である．ただし，l は $0 < l < 2\pi$ なる実数である．(図 9)

この (III 型) 球面二角形とは，図形としては半球のことであり，境界の大円上の二点を頂点と見たてたものです．

すると，今度は (III 型) の球面二角形を奇数個はりあわせると，辺の長さは l から $2\pi - l$ へと変わります．

さて，以上の構成では，辺の長さはいずれにせよ 2π をこえることはありませんでした．

問：長さが 2π を超える辺をもつ球面三角形を作れ．

これは次のようにすればできます．

半球に，境界のひとつの点から長さ l の切れこみをいれた図形を考えます．(図 10) 切れこみをいれる角度を，境界に対して θ （したがってその反対側では $\pi - \theta$ ）になるようにしておきます．このとき $0 < l < \pi$ であり，$0 < \theta < \pi$ となります．この図形も一種の球面三角形と考えることができます．頂点の角度は $\theta, \pi - \theta, 2\pi$ であり，それらと向かい合う辺の長さは $l, l, 2\pi$ である．これを「半球型球面三角形」とよぶことにします．

球面上に描かれた Δ の長さ l_2 の部分に,「半球型球面三角形」であって頂点の角度が $\theta_3, \pi - \theta_3$, 2π であり辺の長さが $l_2, l_2, 2\pi$ であるものを貼り合わせてみます．(図 11) ただし，Δ の角度 θ_3 の頂点には角度 $\pi - \theta_3$ の頂点を貼り合わせるものとします．すると，もともと合った角度 θ_3 の頂点は，もはや頂点ではなくなりますが，できあがるのはやはり球面三角形です．頂点の角度は $\theta_1 + 2\pi, \theta_2, \theta_3$ であり，辺の長さは $l_1 + 2\pi, l_2, l_3$ となります．この操作を k 回繰り返すと，頂点の角度が $\theta_1 + 2k\pi, \theta_2, \theta_3$ であり，辺の長さが $l_1 + 2k\pi, l_2, l_3$ である球面三角形ができあがります．(図 12)

これにさらに (III) 型の球面二角形をはりあわせてもっと大きな球面三角形を作ることはできるでしょうか？

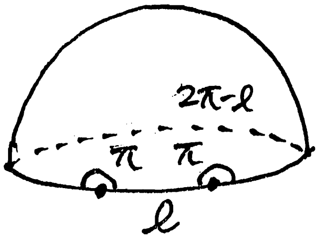


図９　Ⅲ型球面二角形

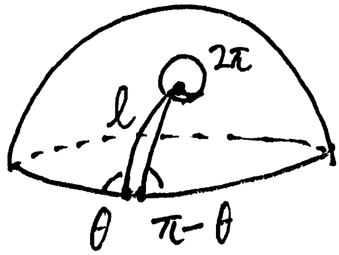


図10　半球型球面三角形

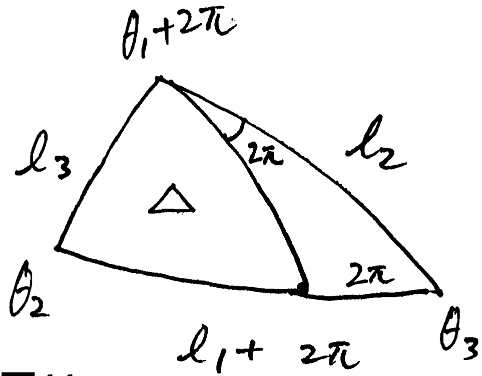


図11

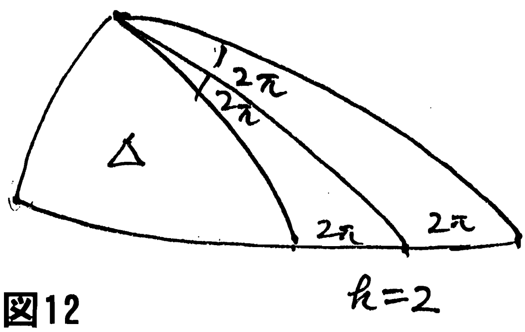


図12

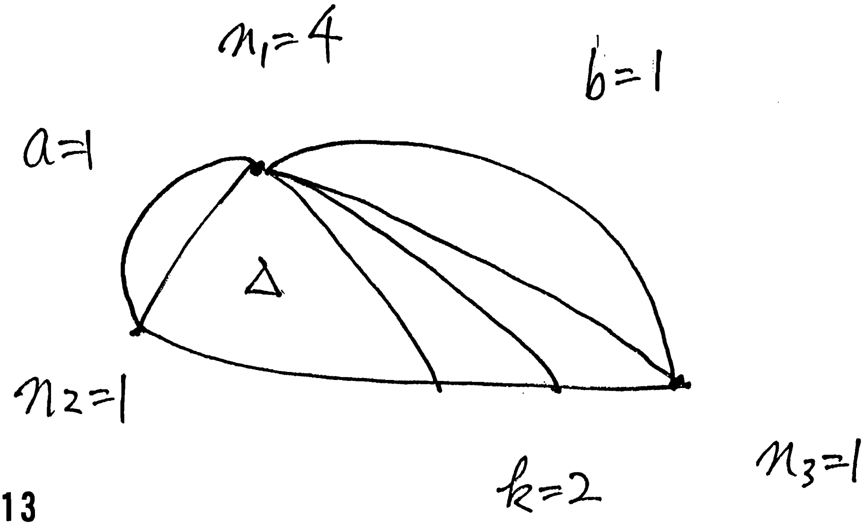


図13

(III) 型球面二角形の辺の長さは 2π 未満でした．だから，これを貼り合わせるなら，長さが l_2, l_3 の辺に対してだけ可能です．(図13) すると，0以上の自然数 a, b に対して，頂点の角度が

$$\theta_1 + 2\pi(a+b+k),\ \theta_2 + 2\pi a,\ \theta_3 + 2\pi b$$

であり，それらと向いあう辺の長さが

$$l_1 + 2\pi k,\ l_2,\ l_3$$

である球面三角形ができあがります．ここで

$$n_1 = b, \quad n_2 = a+b+k, \quad n_3 = a$$

とおくと，$k > 0$ のとき，n_1, n_2, n_3 は三角不等式を充たさないことに注意してください．これによって次の問が肯定的に解けることになります．

問：0以上の整数 n_1，n_2，n_3 が，3角不等式を充たさないと仮定する．このとき，頂点の角度が

$$\theta_1 + 2\pi n_1, \quad \theta_2 + 2\pi n_2, \quad \theta_3 + 2\pi n_3,$$

であるような球面三角形を作れ．

結局，三角不等式を充たしても，充たさなくても，球面三角形は存在することになります．

5　あたらしい手法：球面三角形の分類

これまで作られた球面三角形の例では，長さが 2π より大きな辺は，あったとしてもひとつだけでした．

問：長さが 2π より大きな辺がふたつ以上あるような「球面三角形」は存在するだろうか？

実は存在しない，というのが答えです．

これまでは球面三角形を具体的に貼り合わせによって作る話ばかりをしてきました．だから，何かがあることはわかっても，何かがないことを証明するヒントになる議論はありませんでした．何かが存在しないことを確かめるためには，これまでとは全く違う議論をしなくてはなりません．

新しい議論の出発点として，球面二角形の次の性質を使うことにします．

（球面二角形の性質）球面二角形の2辺の長さは必ず 2π 未満である．

つまり，2辺の長さが両方とも 2π 以上であるような球面二角形は存在しない，という主張です．だから，上の性質も，何かの非存在の主張と思うことができます．

だから，非存在の証明を別の非存在の証明に帰着させるだけなので，ちょっとインチキです．でも，いまはこれを仮定して先に進みましょう．

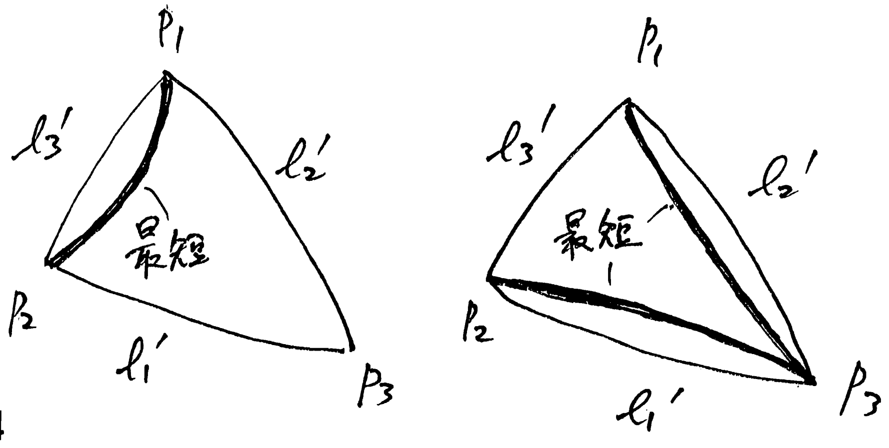


図14

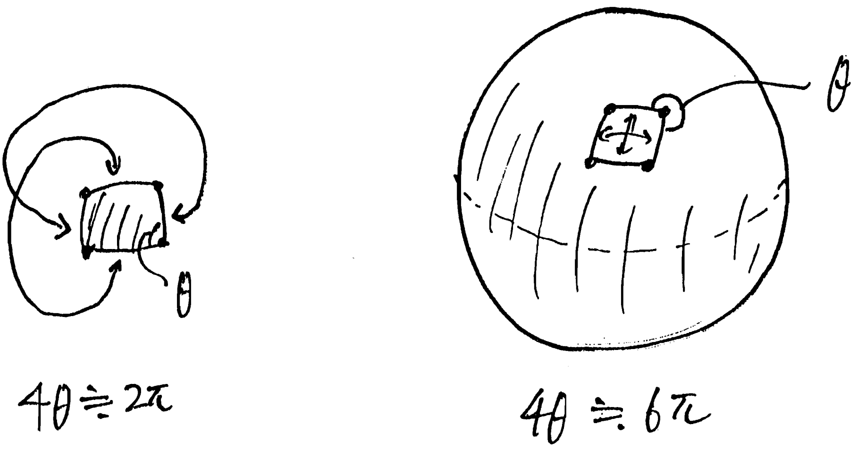


図15

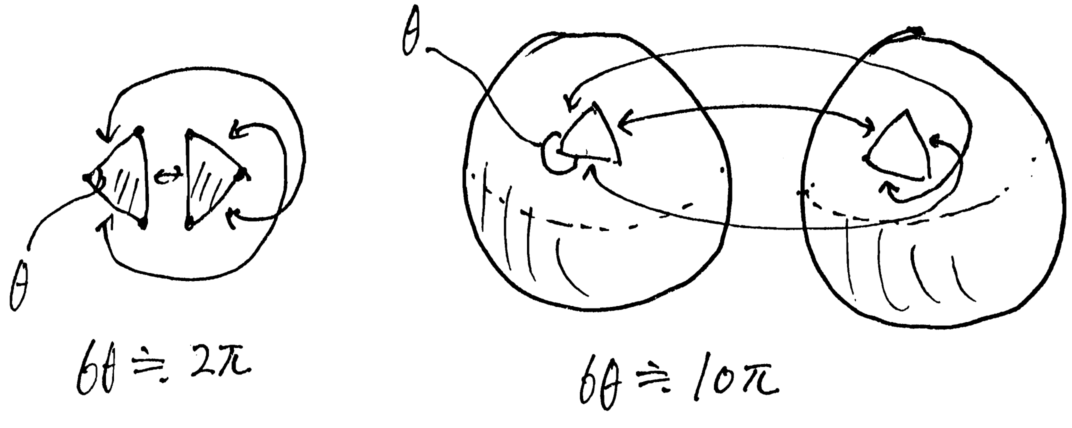


図16

実際に証明するのは次の命題です．

命題：Δ' を長さが l'_1, l'_2, l'_3 の辺をもつ球面三角形とする．ただし，$l'_2, l'_3 > \pi$ を仮定する．このとき，l'_2 あるいは l'_3 の長さは 2π 未満である．

辺と向かい合う頂点を p_1, p_2, p_3 とおく．

実は，もうひとつ次の補題を使います．

補題：Δ' 上の 2 点に対して，それを結ぶ最短経路が存在する．

これはきっと直観的にはもっとも．2 点を両端としてゴム紐をピンとはれば，貼りきったところが最短経路になりそうですね．実際，このアイディアを正当化することによって，数学的な証明に仕立て上げることが可能です．でも，今はこの補題は認めて自由に使うことにします．

さて，p_1, p_2 を結ぶ最短経路を考えます．補題によってそれは確かに存在するわけです．次のふたつの可能性があります．(図 14)

（あ） 最短経路は p_3 を経由しない．

（い）最短距離は p_3 を経由する．

長さが π を超える辺は，その両端の 2 頂点を結ぶ最短経路ではありえないことは容易にわかります．(辺の一部で π を少し超える弧の部分をちょっとだけずらすと，長さが短くなってしまいますから．) これから次のことがわかります．

（あ）の場合には，最短経路は両端を除いて Δ' の内部をとおる．

（い）の場合には，p_1, p_3 を通る最短経路は両端を除いて Δ' の内部を通る．

したがって

（あ）の場合には辺 p_1, p_2 を通る最短経路によって Δ' を切断すると，球面三角形と球面二角形に分割される．

（い）の場合には辺 p_1, p_3 を通る最短経路によって Δ' を切断すると，球面三角形と球面二角形に分割される．

すると，球面二角形の辺の長さは 2π 未満であることを用いると，求める命題が証明されます．

残されたのは次の問です．

問：球面二角形の辺の長さが必ず 2π 未満であることの証明を試みよ．

これの証明はいわないことにします[3]．

実は，上の議論をと同様な議論をすることによって，球面三角形は，前の章で具体的に構成したものによって全て尽くされることを証明できます．それほど難しくはありませんが，場合分けが必要になり，ちょっと複雑です．でも黒板の上でやると，黄と赤と青のチョークで塗り分けられるので，なかなかおもしろいです．残念ですが，時間の関係で省略します．

問：試みてみよ．

[別の種類の議論ができるのではないかという質問が参加者 F からでた．前にでてもらい，黒板で説明してもらう．測地線を回転させてそれが掃く図形を考察する方法である．]

---

[3]難しくはないが，きちんというためには時間を要するので

6　失敗：分岐被覆

[球面の分岐被覆の説明を行おうとした．これを利用すると，角の角度が 2π の倍数である図形をつくることができるからである．この方法でトーラスなどが現れることを具体的に見たかった．(トーラスの場合，角の個数と角度が特別な場合には，この方法によって構成されるものによってつき，分類問題が解決される．１１章の問２９参照.)

しかし，分岐被覆の説明の段階で早く挫折した．

分岐被覆とEuler数を説明し始めたが，皆の反応が鈍かった．被覆の概念を手を変え品を変え，直観的にわかってもらおうとしたが，伝わりにくいようであった．

食事前にさしかかり，皆の目もとろんとしてきたので，敗北宣言（？）をする．

食事とその前後の休み時間に，どのように話の構成を立て直すか思案する．]

7　夕食後：変形族

これまでは球面三角形を主に考えてきました．今度は，球面三角形や球面四角形を貼り合わせて得られる，ひしゃげて角のある球面やドーナツなどの図形を考えます．ちなみにドーナツの表面のような図形はトーラスと呼ばれています．

[以下，話しの内容の要約のみを記す．]

7.1　ひとつの角をもつトーラス

（１）ひとつの角をもつトーラスの例が，球面長方形の対辺を貼り合わせることによって構成された．(図１５）この方法だと，角の周りの角度 θ が $2\pi < \theta < 6\pi$ の範囲のものしか作ることができない．

問：もっと大きな角度の角をもつトーラスを作れ．

（２） 合同な球面正三角形２つをはりあわせてひとつの角をもつトーラスを作ることができる．(図16) この方法だと，角の周りの角度 θ が $2\pi < \theta < 10\pi$ までの範囲のものを作ることができる．

問：球面正方形からできるトーラスと，球面三正角形２個からできるトーラスとが，合同になることがあるだろうか？

（３） 実は，どんな大きさの球面正方形と球面三角形を考えても，できるトーラスが合同になることはない．

このことは，トーラスのもつ対称性を考察することによって示すことができる．

（４） 簡単のため，球面正方形や球面正三角形はなく，平面上のふつうの正方形や普通の正三角形に対して考察してみよう．

問：これらのトーラスを裏返すような自分自身への合同変換（であって与えられた一点を固定するもの）はいくつあるだろう？

その個数が違うようなトーラスは，図形として互いに合同でないトーラスである．

（5）さて，正方形を利用してできるトーラスは，平面を正方格子で「割った」図形である．平面の裏返しであって正方格子を保つものを考えることに帰着する．これは4個ある．

（6）一方，正三角形を利用してできるトーラスは，平面をやはりある格子で「割った」図形である．このことを利用すると，裏返しの合同変換は，6個ある．

したがって，両者は絶対に合同ではありえない．

（7）球面正方形，球面正三角形からできるトーラスの場合にも，同様の結論が成立する．

（8）なお，一般的なトーラスでは，裏返しの合同変換はひとつの存在しない．

問：他に，裏返しの合同変換が存在するトーラスはあるか？

ヒント：正方形の一般化として長方形，正三角形の一般化として二等辺三角形を考えよ．

7.2 モジュライ空間の形式的次元

[閉曲面の種数と角の数が与えられたとき，「球面三角形をはりあわせて得られるような図形」のモジュライ空間[4]の次元を形式的に求める直観的議論を次の順序で行った．]

（1）Euler数の定義を三角形分割を利用しておこなう．三角形分割の細分による不変性を確かめる．以下，三角形分割において角はかならず頂点にふくめておく．

（2）球面三角形による分割が与えられたとする．辺の長さをずらすことによって，新しい図形を作ることを考えよう．ずらす可能性の自由度は辺の個数だけある．

（3）しかし，勝手にずらすと，頂点の角度が変わってしまう．これが変わらないようにするためには，辺の長さのずらしかたは，頂点と同じ個数だけの方程式を充たさなくては成らない．

（4）すると，辺の数から頂点の数をひいたものが，モジュライ空間の次元に一見みえる．

（5）しかし，これは誤りである．同じ図形を異なるやりかたで三角形分割することができるからである．「異なるやりかた自由度」（「ゲージ変換の自由度」といってもいい）は角となっていない頂点を面の上を動かす自由度と一致し，角となっていない頂点の数の2倍だけある．

（6）よって，頂点，辺，面の個数を c_0, c_1, c_2 とおき，角の個数を d とおくと，もとめる自由度は，

$$-2(c_0-d)+c_1-c_0=2d+c_1-3c_0$$

に等しい．三角形分割においては，$2c_1=3c_2$ が成立するので，$c_1=3(c_1-c_2)$ である．これを代入すると

$$=2d-3(c_2-c_1+c_0)=2d-3\chi$$

[4]「モジュライ空間」という言葉は使わなかったが

となる．ただし，χ は Euler 数である．これが求める答えである．

（7）例えば，$d=3, \chi=2$ のとき，この値は 0 になる．これは，球面上に 3 個の角のある図形は，角のまわりの角度を決めると，局所変形ができないことを意味している．(実際，3 個の角度が与えられると，このような図形は一意的であることが示される．次章参照.)

（8）例えば，$d=1, \chi=0$ のとき，この値は 2 になる．これは，トーラス上に 1 個の角のある図形は，角のまわりの角度を決めると，局所変形が 2 次元あることを示唆している．(これは，丁度複素構造の変形の自由度と一致している．[5])

8　夜の部

[ラウンジで参加者，チューターなどが自由に話した．私は主に，社会人２人の参加者達の質問を受けていた．１０代の参加者たちは勝手に盛り上がっていた．]

9　翌日...

[以下の話を午前中にして終わった．かなりの超特急であった．(なお，あらかじめ，複素数，微積分についてまだやっていない参加者がいることを挙手で確認しておいた.)]

（1）複素数とはなにか：加法と乗法と等角写像について最低限の直観的説明をする．(「複素数の分数式をなんでもいいから考えると，それが定義している写像は角度を保つ」)

球面三角形のはりあわせと 1 次分数変換による複素平面のはりあわせとの関係を説明する．(現代数学の用語でいえば，射影構造であって，モノドロミー群が SO(3) にはいるものである.)

（2）微分，微分方程式とはなにか：運動方程式（加速度＝定数・力）の説明．チョークを投げる．その運動に注目してもらう．バネの場合に位置，速度のグラフを書いて説明する．(一般解が cos と sin の 1 次結合でかける.)

（3）複素数に対してバネの微分方程式と同じ形のものを考える．

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -f$$

その解をある領域 U で考えると，cos と sin の 1 次結合が基本的な２つの解となっている．その比を $F(z)$ とおく．

別の領域 V で，別の 1 次結合を基本的な２つの解として採用するとしよう．その比を $G(z)$ とおく．

[5] しかし，トーラスの複素構造と角のまわりの角度を決めても，図形は一意的でなく，いくらでも多くの同型類をもつ場合がある．

すると，U と V の共通部分で，$F(z)$ と $G(z)$ とは互いに１次分数変換の関係で結びついている．

（４）これが，球面三角形の話と微分方程式の話が関係する入り口である．

（５）たとえば,「角が３つある球面」は，合同な球面三角形をふたつ（裏返しに）貼り合わせて得られるものしかないことを梅原さん，山田さんという人たちが，このような方法で証明をした．

10　感想（メール到着順）

Y, 高１　セミナーは楽しかったです．ハイ．セミナーみたいなのには初めて行ったんですけど，やっぱりチューターがいたのがうれしかったですね．あの人たちがいなかったらちょっとヤバかったです．相当難しかったんで．

はじめは現代数学ってなんかわけのわからない事をやってるってイメージがあったんですけど（スミマセン）もしかしたら楽しいかもしれない，１回くらいやってみたら考え方が変わるかもしれないと思って今回のセミナーに応募したんです．友達を誘って．じゃあやっぱり思ったよりずっと楽しかったです．

レベルは ……思ったよりずっと高かったです．ある程度数学には自信があったんですけど，終わってみればレベルが高かったな～と思いました．数学オリンピックで世界大会に出てた人もいましたし．

友達は …… これは最高でした．はじめは知らない人ばかりだったけど，最後は半分くらいの人と喋ってましたし．いろんな人と友達になって今もメールとかしてますから．しかもみんなレベルが高いからお互いに高めあっていけるっていう感じのいい意味でライバルがたくさん出来た感じです．

A，高１　私は，セミナーのことは月刊誌”大学への数学”で知りました．広告（？）は巻末に出ていて，内容については,「球面三角形を貼り合わせると」とだけでした．申し込んだ理由は，数学が好きだったのと，現代数学というのをほとんど知らなくて，なんとなく惹かれた，というのと，やっぱり，全国の数学好きの高校生が集まる，ということでした．理系離れがいわれていますが，それは案外本当なのかも知れません．学校の友達には数学が好きな人はほとんどいないんです．

内容は... やっぱり難しかったです．最初に「球面三角形を貼り合わせると」というテーマを見て，どんな内容になるのかをすこし予想してみたのですが，その時，私は普通学校でやるような幾何の考え方しかなくて，セミナーで考えたような内容になるとは思っていなくて，球面や，ほかの固有の曲面などについてがちゃがちゃやるのだと思っていました．そんな感じのままセミナーに行ったので，初日にあほな質問をするまでずっと私の頭の中では貼り合わせた

曲面がゆがんだりしていました．質問後は，違和感もとれて色々考えたりすることが出来たと思います．

ポケットラウンジではチューターさんを囲んで質問をしたり，次の日に要りそうなことを教えてもらったりしていました．それまでは，ほとんど他の参加者の人とは話す機会がなかったのですが，このときはメールアドレスを交換したり，話をしたりすることができてよかったです．チューター制度はすごくよかったとおもいます．気軽に質問が出来るし，大学の話も聞けるので．

セミナーの内容は，考えることも，考える基準もまったく真新しくて，どれもこれも新鮮，という有様だったのですが，特に新鮮に感じたのは”自由度”のところでした．確かに，ああいう場面で考えたくなることなんだけど，”こんなことを考えるんだ～!!”という感じで．

難易度とか早さは，初日，２日目の最初は良かったのですが，最後の微分方程式の所はかなり早くて，さいしょにちょっとビビってたところにあの早さで，泣きっ面に蜂状態でした．最後の最後まであほな質問をしていて，恥ずかしかったです... それで思ったのですが，やっぱり，時間が短いです！勝手に，もう１回あったらいいな，と思ったのですが，他にも，短いと思ってる人はいたみたいです．泊まるところはショボくていいから，講義長くして！みたいな．

セミナーの内容は，私にとっては，分かったとか，分からなかったとか，そういうこととは少し違うように感じました．私は，高校に入学してから，学校があんまり面白くなくてくさってたりとかどんなことをやろうか，とか，どんなふうに勉強をしようか，とかかなり悩んでいたんですけど，今回のセミナーでいろんなことが吹っ切れた気がしました．本当におもしろくて，いろんなことを考えてみたいと思ったし，高校の数学だけで数学を終わってしまうのは，とてももったいなく思ったんです．父や母はそれだけですごい収穫だ，といってくれます．

あの後，本を読んだりしていると，時々，ふとセミナーの内容で疑問に思っていたことが分かった（ような気がした）り，他の内容のはなしが何となくセミナーの内容とつながったりすることがあります．私が感じることがあっているかどうかは別として，そういうときはすごく楽しいです．

セミナー自体は一人で参加したのですが，自然にメールアドレスを交換したりして冬休み中というのもあってか，頻繁にやりとりをしています．内容はかなり数学をはなれて干し柿の話しになったりもしていますが... こういう友達も，地元にいては絶対に出来ません．集まってる人はすごくハイレベルで，圧倒されてばかりでした．こんな人たちがいるんだと思うと，大学に行くのがすごく楽しみで仕様がないです．セミナーは何もかもがすごく印象的でした．こんな機会がもっとあれば良いな，と思ったし，そのためにも，もっといろんな勉強をしたいです．私次第でもっと楽しくもなるように思いました．とっても楽しかったです．

N, 高２　ぼくは，彼らがポケットラウンジで真夜中を過ぎても『数学』を楽しく（もしくは眠そうに）話し合っているのは驚きました（なんとなく想像はつきましたが）．正直その集団の

中に入れた僕自身もふくめて『ヤバイかな？(色んな意味で)』と思いました．また，独特の雰囲気があるのを文型の僕は感じ取りました．ぼくは，校則変更運動で署名を約300人集めたり，クラブを創ったり，テコンドーの道場に通ったり，ボランティアをしたり（労働待機者（職に就けない，ダンボール集めてる人たちのこと）の援護），スーパーコンピュータコンテスト準優勝したりと，浅く広く活動しているのに対して，彼らは特殊な分野を深く掘り下げてやってきているなぁと思いました．大げさに言えば（ある意味率直な意見として），『生きる基準（尺度)』が違うと思いました．数学にたとえて言えば，『基にしている前提（公理など）が違うために，別の数学が繰り広げられていく』ように『生きる基準が違うので，僕とは違う世界を彼らが繰り広げている』と言う感じでした．(例えば，ヤクザならヤクザの行動を駆り立てる本質みたいなのがあるはずです.) まわりの人たちから，『数学に関係した職につきたい』ということを聞いて『なるほどなぁ…』と思っていました．因みに，そう感心していた僕は，【経営・語学・コンピューター】を総合した実践的なビジネスを学習したいと思っていたのです．最後に，おもしろいエピソードを一つ，誰かの言った『短い間ですが…』と言う言葉にたいしての先生の意見が，はずれではないなと思いました[6]．なぜなら，1月からセミナーで同じだった一人が，偶然にもぼくの行ってる数学専門塾Surにくることになったからです．1ヶ月後にはこの塾を卒業していますが，こういった接点が出てくるのはおもしろいなぁと感じました．

H，高2　セミナー自体のレベルは高く，あまり理解できなかったが，大学での数学の勉強の仕方のようなものに触れられたような気がして嬉しかったです．一番の収穫は講義そのものというより，そこで色々な人に出会えて，色々な事が話せたことであると思います．数学好きの人達と，2日間泊りがけでお喋りができたので，その人の数学哲学であるとか，勉強法だとかが聞けたのは本当に良かったです．良い経験をしたと思っています．　講義も面白かったけれども，僕にはレベルが高すぎました．特に，講義がいきなりリーマン幾何学を使って進められたのはちょっと驚きました．ちょっと知らせておいてもらえば少しそのあたりの事を予習してから行ったのに…と少し思いました．　でも，いずれにせよ，本当に良い経験が出来たと今つくづく思っています．教えてくださった先生にも，チューターの方々にも感謝しております．ありがとうございました．

K，高2　難易度は私にとってはすごく難しかったです．始めのうちは特に，初めて見る記号もあって，話されていることがチンプンカンプンでした．内容は面白そうだとは思いますが，私はわからなかったのでそう思えませんでした．

I, 中2　とりあえず，まず講義の感想について, 書かせていただきます．もしかしたら，ぼくがただ聞き落としているだけ，ということもあるかもしれませんが，もしあったらすみません．

[6]「短い間ですがよろしく」という自己紹介の挨拶が多かったので，これはひょっとすると一生の付き合いにつながるかもしれないよ，とコメントをした．

まず，講義の内容についてですが，これは大変興味をもてました．球面３角形, という幾何学的な対象で，微分方程式とか，あとこれは講義では取り上げられませんでしたが被覆写像とか，そういう対象に広がっていくのはすごく楽しかったです．また，講義の進め方も, 問題を提起しながら, 考えながら進んでいく，というスタイルは，よかったとおもいます．現代数学になかなかなれていなくて学んでいるほうとしては, 定義，定理，証明…というスタイルより，ああいうスタイルのほうがなじみやすかったとおもいます．それで，講義をうけるなかで，ちょっとやりにくいかな，とおもったところを，いくつか書かせていただきます．僕の勘違いだったら申し訳ありません．講義を受けていておもったのは，細かい定義をもうちょっとしっかり示してくれたら, 見通しがよかったような気がします．たとえば，球面三角形の定義をどんどん拡張していきましたが，そのときに，はじめに，一般の（角度を自由にして, 自己交差を許した）球面三角形はどのようなものなのか，ということを明示していただいたら，あるいは一般の曲面に対する「裏返し写像」がどのような写像なのか，ということを明示していただいたら, よかったような気がします．それで，こんなことは古田さんにもうしあげても，どうしようもないのですが，セミナーの時間は, やはりもうすこし長いほうが, 受けるほうも, 講義されるほうも，楽だし，深くできるのではないか，という感想を持ちました．次に, 講義以外の交流等ですが，それは僕の場合とてもうまくできたとおもいます．夜は，ポケットラウンジで，チューターの１人で４年生の方を囲んだお話会のようなものに加わっていたのですが, とても楽しめました．なによりもよかったのは，数学が好きな中高生がこうやって集まれることって言うのは, なかなかなく，そうしたことができたことだとおもいます．そのときいた方たちの何人かとは，メールアドレスを交換して, いまもいろいろとメール交換をしていたりします．そういうふうな方ができただけでも，あのセミナーは価値があったとおもいます．さいごになりましたが，ああいうふうにおなじぐらいの年で, 同じ趣味を持った人と過ごす, というのはやはりとても楽しかったので, 来年もぜひ参加してみたいな，とおもいました．

M，高１　数学は大変好きというほどでもないのですが，数学ファンの友達に誘われて，またテーマが「球面三角形」とあまり考えた事もないようなものだったこともあって参加しました．微分はまだまだ初心者なので最後の微分方程式は理解できませんでしたが，球面三角形を貼り合わせるという，僕には形を想像するのさえ，難しい図形を，最終的に数式で表すこともできるのだと感動しました．それとともに，想像できない世界までも本質的な部分を変えずに発展させることができる数学はすばらしいと思いました．

11　Appendix:当日配った演習問題集

やさしいものも難しいものもあります.（例えば問 26 の答えを私は知りません.）参加者達に，未解決の問題といっても，パズルでもなく，歴史的大問題でもない，日常的なものがあること

を示したかったことがあります．途中の脚注で，講義の中で説明する，と書いた事項は結局説明する余裕がありませんでした．

話を聞くのと平行して皆さんに考えてもらいたい演習問題です．太文字で書かれたものは，講演の中で取り上げたいと考えているものです．

11.1 球面三角形について

以下，半径1の球面上の図形を考えます．

問 1. $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ が与えられたとします．このとき，これらの角度をもつ球面三角形が存在するための必要十分条件は，

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 < 1$$

であることを証明してください．

問 2. 球面三角形の頂点の角度が $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ であるとき，その面積は $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$ であることを示してください．

（ヒント：三辺をふくむ三個の大円によって球面を分割し，面積に関する連立方程式をたててみてください.）

（注：実は上の公式は，どれかの角度が π 以上のときにも成立します.）

問 3. 上の面積の公式は，球面 n 角形ではどうなるでしょうか．

（ヒント：球面 n 角形を球面三角形に分割することができます.）

問 4. 頂点の角度が $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ である球面三角形が2つあったとすると，それらは互いに合同であることを示してください．

（注：角度のひとつが π であるときにはこの命題は成立しません.）

問 5. 角度 $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ の球面三角形が存在したとします．このとき，次の角度をもつ球面三角形が存在することを示してください．

1. $2\pi - \theta_1,\ 2\pi - \theta_2,\ 2\pi - \theta_3$
2. $2\pi - \theta_1,\ 2\pi - \theta_2,\ \theta_3$
3. $2\pi - \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$

また，上のいずれかの角度をもつ球面三角形が存在するとき，他の角度をもつ球面三角形が存在することを示してください．

問 6. $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 2\pi$ が与えられたとします．ただし，θ_i はいずれも π とは等しくないと仮定します．このとき，これらの角度をもつ球面三角形が存在するための必要十分条件は，

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 < 1$$

であることを証明してください．

問 7. 球面三角形と球面二角形のそれぞれの一辺の長さが等しいとき，その辺を貼り合わせることによって，新しく球面三角形を作ることができます．この方法によって，3 個の角度がいずれも 2π を越えるような球面三角形をできるだけたくさん作ってください．

問 8. 一辺の長さが 2π を越えるような球面三角形を作ってください．[7]
（注：前問の方法だけでは作ることはできません．）

問 9. $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$ が与えられたとします．ただし，θ_i はいずれも π の倍数とは等しくないと仮定します．このとき，これらの角度をもつ球面三角形が存在するための必要十分条件は，

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 < 1$$

であることを証明してください．
（注：実は上の条件は必要条件でもあります．なぜでしょう？）

問 10. $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$ が与えられたとします．ただし，θ はいずれも π の倍数とは等しくないと仮定します．このとき，これらの角度をもつ球面三角形は，もし 2 つ存在するなら，その 2 つは互いに合同になることを証明してください．
（ヒント：球面二角形の貼りつけ等の構成の「逆」を考えます．）

問 11. 前問，前々問において，ひとつ（以上）の角度が π の倍数である場合には結論はどうなるでしょうか？

11.2 閉じた曲面

以下,「角」以外の点では（本来の）球面と同じ曲がり方をした曲面のみを考えます．また,「角」とは，球面多角形をふたつ貼り合わせたときに生じる特異点と同じ形状をさすことにします．

問 12. 角が 1 個の「球面」であって，その角度が 2π と異なるものは存在するでしょうか．
（注：上の問の中で「球面」とは，正確には，位相的には（本来の）球面と同じ形状をした角付きの曲面をさしています．）

[7]服部善信さんによる構成です．

問 13. 角が2個の「球面」にはどんなものがありますか.

問 14. 角が2個および3個の「球面」のもつ自由度を形式的に数えてください. 角が n 個の場合はどうでしょうか.

問 15. 合同な2個の球面三角形を貼り合わせることによって様々な「角が3個の「球面」」を作ってください.

問 16. 角が3個の「球面」は，必ず合同な2個の球面三角形の貼り合わせによって作ることができるでしょうか. また，そのような球面三角形は一意に定まるでしょうか.

問 17. n 個の角をもち，それらの角度が $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ である「球面」の面積を A とおくと，

$$A = 4\pi + \sum_{i=1}^{n}(\theta_i - 2\pi)$$

が成立することを示してください.

問 18. 角が1個の「トーラス」のもつ自由度を形式的に数えてください. 角が n 個の場合はどうでしょうか.

問 19. 角が1個の「トーラス」であって，様々な角度 θ の角をもつものを作ってください.

問 20. n 個の角をもち，それらの角度が $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ である「トーラス」の面積を A とおくと，

$$A = \sum_{i=1}^{n}(\theta_i - 2\pi)$$

が成立することを示してください.

問 21. 角が1個の「トーラス」は，必ず合同な2個の球面三角形の貼り合わせによって作ることができるでしょうか. また，そのような球面三角形は一意に定まるでしょうか.

問 22. 裏返しに自分自身に重ねるやり方が3個ある「角が1個の「トーラス」にはどんなものがあるでしょうか.

問 23. 球面長方形の対辺同士を貼り合わせると，角が1個の「トーラス」が得られます. こうして得られる角が1個の「トーラス」は，裏返し写像がふたつあり，その2通りの写像は，どちらを先に行って合成しても同じ結果になります. このような2つの裏返し写像をもつ「角が1個の「トーラス」」は，どのくらいたくさんあるでしょうか.（特に，角度を固定したとき，どのくらいたくさんあるでしょうか.）

問 24. 裏返し写像をもつ「角が1個の「トーラス」」であって，裏返し写像がひとつしかないものはどんなものでしょうか.

11.3 被覆について

問 25. n 個の角をもつ「球面」が，どの角の角度も 2π の倍数であるとき，角をもつ「球面」の面積はある自然数 d によって $4\pi d$ とあらわされます．このとき，この角をもつ「球面」によって，本来の角をもたない球面を，ほとんど d 重に覆うことができることを示してください．ただし,「d 重」には例外の点があり，それが n 個の角と丁度一致しています．

上の問のような状況のとき，n 個の角をもつ「球面」は，本来の角をもたない球面上の分岐 d 重被覆であるといわれます．

問 26. m_1, m_2, m_3 を正の整数とします．d 次の対称群に属する 3 個の要素であって，次の条件をみたすものを「本質的に」分類してください．

- $i = 1, 2, 3$ に対して a_i は長さ m_i の巡回置換である．
- a_1, a_2, a_3 によって生成される部分群は推移的である．

ここで,「本質的な分類」とは，対称群の内部自己同型によって写りあうことをいいます．[8]

（ヒント：角が 3 個ある「球面」であって，角の角度が 2π の倍数であるものの分類に帰着してください.）

問 27. 球面の分岐 2 重被覆の分岐点の個数は必ず偶数になることを示してください．

問 28. 球面の分岐 2 重被覆が「トーラス」になるのは，分岐点の個数が 4 のときであることを示してください．

（注：こうして作られるのは 4 個の角をもつ「トーラス」であってどの角の角度も 4π となります.）

問 29. 1 個の角をもつ「トーラス」であって，角の角度が 4π の倍数であるものを，分岐被覆を利用してつくってください．

（注：実は，1 個の角をもつ「トーラス」であって，角の角度が 4π の倍数であるものは，分岐被覆を利用してつくられるものに限ることが示されます.）

問 30. 上の問（とその後の注）を利用して，1 個の角をもつ「トーラス」であって，角の角度が 4π の倍数であるものの分類を，組み合わせ論的な問題に帰着してください．

[8]「対称群」,「巡回置換」,「内部自己同型」の定義は話の中で説明する予定です．

11.4 微分方程式について．

$R(x)$ を x の有理式とし，微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = R(x) f(x)$$

を考えます．ただし，x は複素数を動くものとし，$R(x)$ の係数も複素数とします．
$R(x)$ は次の仮定を満たしているものとします．

- $R(x)$ の分母がゼロになる点ではゼロの重複度が 2 以下である．
- 上の仮定のもとで，任意の x_0 に対して

  $$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 R(x)$$

  は収束する．その極限を $a(x_0)$ とおくとき，λ に関する 2 次方程式

  $$\lambda(\lambda - 1) = a(x_0)$$

  の 2 解の差は，整数でない実数である．(「整数あるいは半整数が解でない」という条件と同値である．)

（注：2 解の差が整数のときにも，もう少し $R(x)$ に条件をおくと，扱うことができます．)
この微分方程式を用いると，x の住みかである複素平面を，角のある「平面」とみなすことができます．このことは話の中で説明したいと思います．
たとえば，点 x_0 の周りの角度を θ とするとき，上の 2 次方程式の解の差は $\theta/2\pi$ になっています．
「球面」や「トーラス」は，複素平面をいくつか貼り合わせたものとして理解できます．たとえば「球面」は x, y で表されるふたつの複素数の動くふたつの複素平面を $xy = 1$ の関係式によって貼り合わせたものと理解することができます．
したがって，微分方程式による定式化は,「球面」や「トーラス」の場合にも行うことができます．
微分方程式による定式化の便利なところは，たとえば「球面」を角つきとみなすふたつのやり方があったとき，それの「差」のようなものを，$R(x)$ の差として考察できることです．
これを利用すると，応用として,「3 個の角のある「球面」は 2 つの合同な球面三角形を貼り合わせて得られる．しかもその球面三角形の取り方は一意である」という命題を，次の代数的命題に帰着させることができます[9]．

[9]梅原雅顕・山田光太郎の両氏による議論です．

Lemma 31. 有理式 $A(x)$, $B(y)$ が，次の条件を同時にみたすことは，いずれも恒等的にゼロである場合を除いてありえない．

1.
$$B(y) = A(y^{-1})y^{-4} \quad (A(x) = B(x^{-1})x^{-4})$$
が成立する．この条件はもっと見やすくいうなら「$xy = 1$ のとき $B(y)(dy)^2 = A(x)(dx)^2$ が成立する」ということである．

2. $A(x)$ の分母がゼロになるとしたら，それは $x = 0$ または $x = 1$ のいずれかであり，しかも重複度は1である．

3. $B(y)$ の分母がゼロになるとしたら，それは $y = 0$ または $y = 1$ で，しかも重複度1である．

問 **32.** 上の主張を示してみてください．

参考文献

[1] W. Chen and C. Li, What kinds of singular surfaces can admit constant curvature?, Duke Math. J., **78** (1995) 437–451

[2] M. Furuta and Y. Hattori, 2-dimensional singular spherical space forms, preprint.

[3] Y. Hashimoto and K. Ohba, Cutting and pasting of Riemann surafaces with Abelian differentials, Universität Bielefeld preprint 96-069, 1996

[4] Y. Hattori, MSc thesis, RIMS Kyoto University, January 1998

[5] F. Luo and G. Tian, Lioubille equation and spherical convex polytopes, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992) 1119–1129

[6] J. Milnor, Morse theory, Annals of Mathematics Study **51**, Prinston Univ. Press, Princeton, 1963.

[7] M. Trayanov, Metric of constant curvature on a sphere with two coninal singularities, in "Differential Geometry", Lect. Notes in Math. 1410, Springer-Verlag, (1989) 296–306

[8] M. Trayanov, Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991) 793–821

[9] M. Umehara and K. Yamada, Metrics of constant curvature 1 with three conical singularities on 2-sphere, math.DG/9801137

(この参考文献も演習問題と一緒に配ったものです.)

（ふるたみきお，東京大学大学院数理科学研究科）