ファイナンスの基礎となる数学

ブラウン運動から伊藤の公式まで

楠岡成雄
（東京大学大学院数理科学研究科）

本稿は平成１３年３月２５日に行った日本数学会市民講演会における講演の内容を若干修正したものである。

1　ファイナンスに現れる時系列データ

次ページの図１～３のグラフを見ていただきたい。一見するとどれも似たようなグラフであるのだが、実はかなり違うものである。図１は乱数で人工的に発生させたランダムウォーク（４００ステップ）である。図２，３はアメリカの株価指標の一つであるナスダック指数の推移を示したもの（http://finance.yahoo.com/ による）である。しかし、図２は１年間の推移、図３は１日（７時間）の推移を示したもので、全くスケールが違うものである。このようにファイナンスに現れるデータは想像以上に複雑な動きをしている。

株などの証券の価格は刻一刻変化していく。このように時刻と共に変動していくデータを時系列データと呼ぶ。株価を予測することができるかということは何世紀にもわたる人々の関心事であった。かのニュートンも株相場に手を出して少なからず損をしたと伝えられている。「株価は予測できるがその方法がまだ知られていないだけである。その方法を自分が見つけて億万長者になってみせる。」こう思っている人達はたくさんいる。ある人達は株価の過去数年のデータを分析し、ある人達はマクロ経済データを分析し、ある人達は星座の運行との関連を分析し、それぞれ自分たちは他の人より正確に予測できると主張している。

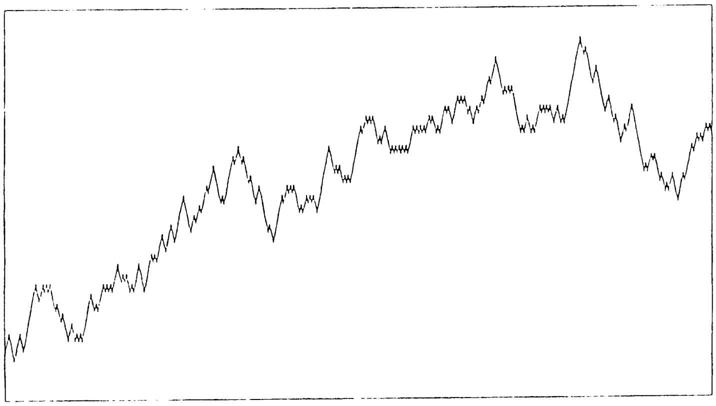

図1

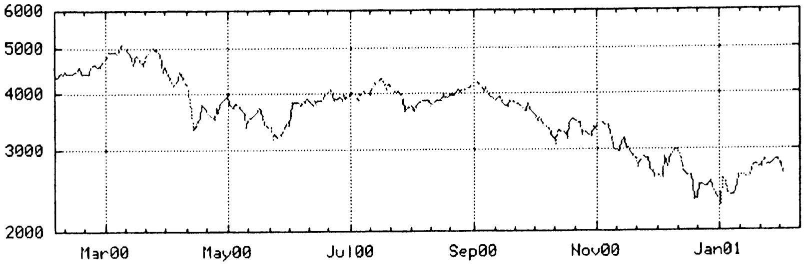

図2

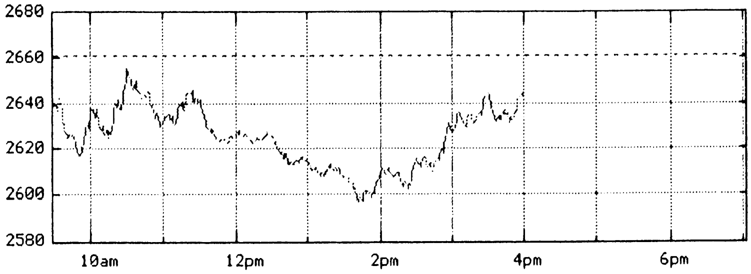

図3

これに真っ向から対立する意見がある。株価は緩やかな統計的性質は持つけれどもそもそも正確に予測することは不可能であるという考え方

である。これはしばしば「ランダムウォーク仮説」と呼ばれる。この講演の目的は、株価がランダムウォークであるかを論じることではない（このようなことに興味がある方は [3] をご覧下さい）。今日、数理ファイナンス・金融工学等と呼ばれる学問分野が存在し、そこでは確率解析が基礎言語として用いられている。それがなぜなのか、そしてそれはどのようなものか解説することが目的である。

2　確率モデル

現実の現象を数理モデルで記述すること、それが数理科学であるが、そのもっとも手本となるのが古典物理学である。古典物理学はニュートンの運動方程式で記述される。それは微分方程式であり、瞬間々々における運動の様子を記述している。その方程式は簡単な関数を用いてきれいに解くことができるものもあるが、ほとんどの場合、わかりやすい形で解くことはできない。則ち、一瞬の運動の様子であれば簡単に記述できるが、長時間にわたる運動の記述を直接行うことができない、もっとも精密な予測のできる物理学においてさえそうなのである。

さて、ファイナンスに対する数学モデルをどのように作ればよいか、まずふまえるべき論点がいくつかある。

１．不確実性の存在

将来の株価が過去のデータから１００％完全に予想できると考える人はいないであろう。従って、モデルは不確実性を含んだものでなくてはならない。不確実性を含む数学モデルで現在もっとも用いられるものは確率論に立脚した確率モデルである。この場合、時系列は確率過程と解釈される。

２．連続時間か離散時間か

価格というものは取引がなければ決まらない。取引は有限時間内に有限回しか発生しないから、連続時間モデルというのは非現実と思われるか

もしれない。しかし、単位時間が非常に短い時は、時間を連続とした方が扱いやすくなることが多い。また時間の最小単位をはっきりと定めることが難しい。このため、連続時間の確率過程モデルが望ましい。

３．履歴への依存

これについては今回は論じられないが、物理学における粒子とは違い、人間は過去のことを記憶し、それを基に行動する。そのことを考慮したモデルが必要である。

古典物理学を手本に考えると、ファイナンスにおいては確率を含んだ微分方程式（確率微分方程式）が必要に思われる。しかし、それはそんなに簡単な概念ではなく、２０世紀半ばに伊藤清により初めて数学的な基礎が与えられた。それは今日では確率解析あるいは伊藤解析（Ito Calculus）と呼ばれている。なぜそれが、そんなに難しかったのであろうか。

3　離散時間確率過程モデル

確率過程を作りだすのは難しくない。今、さいころを何回も振ってみよう。最初に振ったとき、賽の目が奇数ならば $W(1)=-1$, 偶数ならば $W(1)=1$, ２回目に振ったとき、賽の目が奇数ならば $W(2)=-1$, 偶数ならば $W(2)=1, \ldots$ というように決めていく。すると、n 回目に振った賽の目が奇数ならば $W(n)=-1$, 偶数ならば $W(n)=1$ となる。$W(n)$, $n=1,2,\ldots,$ は確率 $1/2$ で -1 と 1 の値をとる独立な確率変数の列であり、W は純粋なノイズと考えることができる。$S(0)=0$, $S(1)=W(1)$, $S(2)=W(1)+W(2), \ldots$ $S(n)=W(1)+\cdots+W(n)$, というように決めていくと、$S(n)$, $n=0,1,2,\ldots,$ は賽の目の出方に応じて色々な軌跡をとる。この S のことをランダムウォークと呼ぶ。

例えば、$S(10)$ の分布がどうなるか、３０回試行を行ったもののグラフを図 4, 5 にあげてみた（実際にはさいころを振ったのではなく疑似乱数によるコンピュータシュミレーションの結果である）。

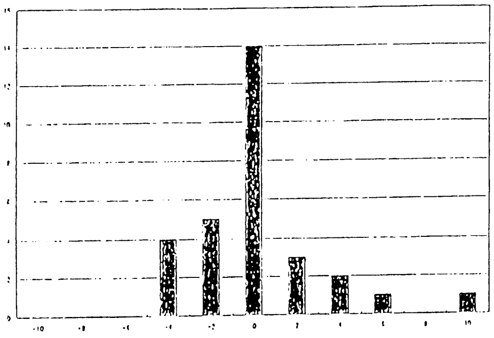

図4

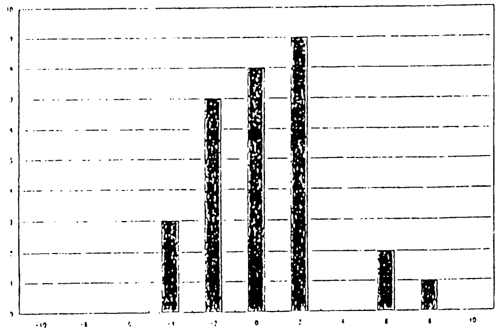

図5

$S(10)$ の理論的な確率分布は図 6 のような2項分布と呼ばれるものになるはずであるが、３０回くらいの試行ではそうきれいにはならない。

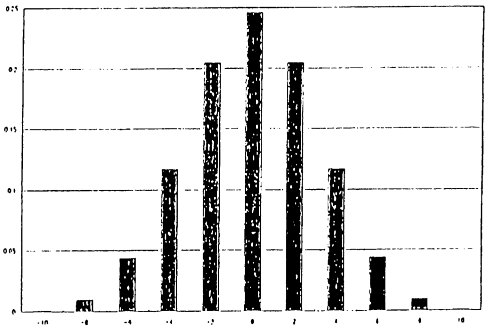

図6

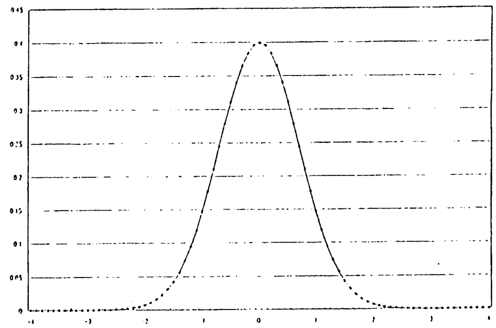

図7

ランダムウォーク S は W を単純に足しあげたものであるが、もう少し複雑なものを考えてみよう。いま、 $W(n), n=1,2,\dots,$ が与えられたとき、 $X(n)$ を

$$X(0)=1, \qquad X(n+1)=X(n)+X(n)(0.5W(n+1)+0.1), n=0,1,\dots,$$

で定める。同じ W が与えられたときの $S(n)$ と $X(n)$ $0\leq n\leq 100$ の例を図 8, 9 にあげた。どの軌道も出現する確率は 2^{-100} となるはずである。

このように、 W を基に色々な確率過程を作り出すことができる。

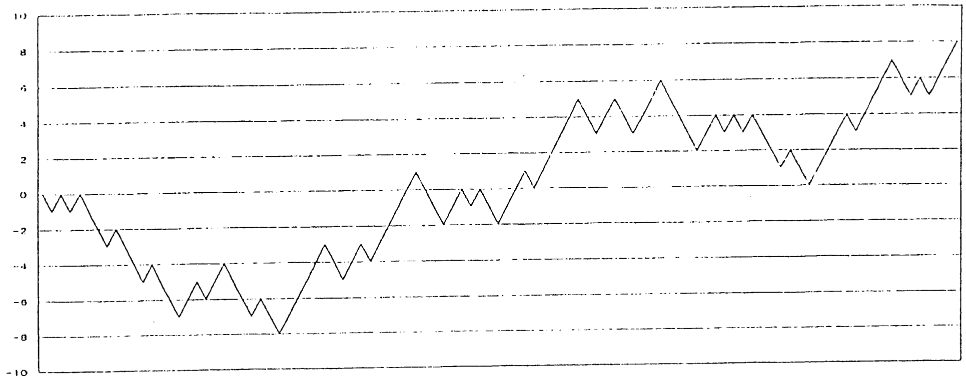

図8

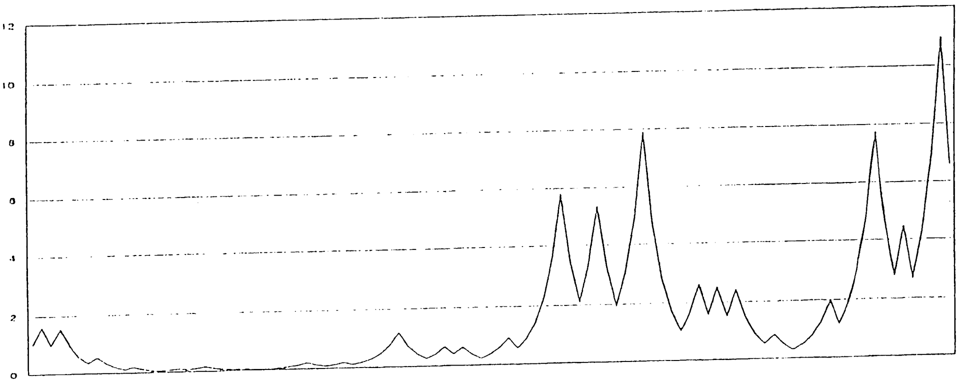

図9

4　バシュリエ、アインシュタイン、ウィナー

花粉の粒子を水に入れておくと、花粉が水を含んで膨れ上がり、やがて破れ中から多くの微粒子が出てくる。この微粒子は顕微鏡で見ると激しくかつ奇妙な運動を行う。イギリスの植物学者ブラウンはこの運動について詳しく研究した（１８２８年)。そのためこの現象はブラウン運動と

呼ばれる。アインシュタインはこのブラウン運動を分子論により量的に説明してみせた（１９０５年)。フランスの物理学者ペランはアインシュタインの理論に基づき巧妙な実験を行いアボガドロ数を計算してみせた（１９０８年)。これが原子論の正しさの証明の決定打となった（詳しくは江沢 [2] をお読み下さい)。

一方、フランスの数学者バシュリエは、ブラウンの発見と無関係に、株価を説明するものとして「ブラウン運動」を思いつき、数学的にはアインシュタインと同等な理論を作り上げた（１９００年)。彼の論文のタイトルは「投機の理論」であり、デリバティブの価格の決定問題をも論じている。

しかし、バシュリエやアインシュタインは真の意味で確率過程としてブラウン運動の理論をうち立てたのではない。ブラウン運動は連続時間の確率過程であるが、先に述べたランダムウォークの連続時間版というべきものである。$S(n)$ の分布が二項分布であること、$n < m$ の時、$S(m)-S(n)$ と $S(n)$ とが独立であることなどという事実を積み重ねると、$S(n), n = 0, 1, 2, \dots$ の統計的な性質がわかり、色々な計算はできる。しかし、我々のランダムウォークのイメージは図 1 や図 8 にあるような軌跡である。このような実現された軌道まで踏み込んで数学的に記述することは、バシュリエらの理論ではできず、１９２３年のウィナーの研究で初めて可能となった。

いったい何が問題なのであろうか。ブラウン運動はバシュリエが論じたようにランダムウォークの極限で与えられるべきものである。つまり、

$$B_n(t) = \sum_{1 \leq k \leq nt} W(k)(\frac{1}{n})^{1/2}, \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

の $n \to \infty$ での「極限」となっているように理解される。しかし、さいころを振って $W(k)$ を決めていくのでは、いつまでたってもさいころを振った回数は有限回であるから、極限をとると、その極限は既に出た賽の目とは無関係ということになってしまう。いわば、「アキレスと亀」「矢

は飛ぶことはできない」といった話に引っかかって仕舞い、一瞬の先にも進めなくなってしまう。

一方、既に１７３３年にドモアブルが示している中心極限定理によれば、確率変数 $B_n(t)$ の確率分布は平均 0 分散 t の正規分布に近づく (図７)。従って、ブラウン運動 $B(t), t \geq 0,$ の分布は平均 0 分散 t の正規分布であるはずである。しかし、正規分布は連続な分布であるから、ブラウン運動が特定のある軌道となる確率はゼロである。ランダムウォークはそれぞれの軌道の確率が小さいながらも正であったので、場合の数で確率を考えることが可能であったが、ブラウン運動はそうはいかないのである。

ウィナーは当時出来つつあった、位相空間論、測度論、関数解析を用いてブラウン運動の軌道に関する数学の理論を構成した。このためブラウン運動はウィナー過程とも呼ばれる。ここではこれ以上は立ち入らないが、現代数学なくしてはブラウン運動を初めとする様々な確率論の直観的な概念を厳密に記述することが出来ないことは知っていてほしい。

5　レヴィ、コルモゴロフ、伊藤

レヴィはブラウン運動をもっと直観的方法で構成できるのではないかと考えた。彼は式 (1) より考えて $\xi(s), s > 0,$ が独立で確率 1/2 で -1 または 1 の値をとる確率変数の列ならば、

$$B(t) = \int_0^t \xi(s)\sqrt{ds}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

がブラウン運動になると考えた。しかし左辺の $\sqrt{ds}$ に意味をつけることは不可能で、この式はさまざまな理由で正当化は不可能な式である。しかし、レヴィはこの式に基づきさらに確率微分方程式を考えようとした。それはアイデアには富んだものであったが、厳密性を重視する現代数学においては数学とは認められないものであった。

一方、コルモゴロフは確率微分方程式そのものを考えることはあきらめ、バシュリエやアインシュタインが考えたように確率微分方程式により記述されるであろう確率過程（拡散過程と呼ばれる）の確率分布の性質を調べ、それが拡散方程式と呼ばれる偏微分方程式で記述されることを示した。

レヴィやコルモゴロフの直観を厳密な数学として構成したのが伊藤であった。伊藤はまずブラウン運動を基礎に確率積分の理論を構成し、確率微分方程式を積分方程式として定式化し、その解の存在と一意性を示した（１９４２年)。さらに今日、伊藤の補題あるいは伊藤の公式と呼ばれる重要な公式を発見し（１９５０年)、確率積分の理論の基本を完成させた。

伊藤理論の詳細をここで論じることはできないが、その基本的な論点を述べよう。f を滑らかな良い関数とし、$B(t), t \geq 0,$ をブラウン運動とする。この時、確率積分は次のように定義される。

$$\int_0^t f(B(s))dB(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq k\leq nt} f(B(\frac{k-1}{n}))(B(\frac{k}{n}) - B(\frac{k-1}{n})) \tag{3}$$

ここで、普通の積分であれば式 (3) の値と

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq k\leq nt} f(B(\frac{k}{n}))(B(\frac{k}{n}) - B(\frac{k-1}{n})) \tag{4}$$

の値は同じはずであるが、実は二式の値は一般には異なる。さらに式 (3) をもって確率積分の定義としなければ、理論が簡明にならず使いにくいものとなる。このようなことを考慮して伊藤は確率積分の理論を構築した。伊藤は「厳密ということだけじゃだめなんです。それしか方法がないということが一番大事なんです。」([1]p.310) と語っているが、確率積分の定義はその典型である。

最後に伊藤の公式について述べよう。伊藤は次の式を証明した。

$$f(B(t)) = f(B(0)) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds \qquad (5)$$

合成関数の微分の公式を覚えておられる方ならば、

$$f(x(t)) = f(x(0)) + \int_0^t f'(x(s))\frac{dx}{ds}ds$$

が滑らかな関数 $x(t)$ に対して成り立つことがすぐにわかると思う。なぜ２階の微分が現れるのか。それは、ブラウン運動の軌道が至る所微分不可能であるような激しい「ジグザグ」な軌道となっているからである。式 (5) を微分形で強引に書くと

$$d(f(B(t))) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt$$

となる。一方、形式的にテイラー展開を行うと

$$d(f(B(t)))$$

$$= f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))(dB(t))^2 + (\ dB(t) \text{ の 3 次以上の項}\ )$$

という式を得る。これを比較すると $(dB(t))^2 = dt$, $(dB(t))^3 = 0$ という式が現れる。レヴィの考えた式 (2) を思い出してほしい。これを微分形に書けば $dB(t) = \xi(t)\sqrt{dt}$ となるこの式は厳密性を欠くが形式的には

$$(dB(t))^2 = (\xi(t))^2 dt = dt \qquad (\ \xi(t) \text{ の値は } -1 \text{ か } 1 \text{ である！})$$

となり、伊藤の公式から導いたものに一致している。レヴィの正当化不能と思われた直観が伊藤の公式を通して数学に取り込まれたのである。

6 終わりに

１９７０年頃ブラックとショールズは、マーコビッツらによって１９５０年代に構築されたポートフォリオ理論を動的ヘッジという概念に拡張し、デリバティブ理論の基礎理論を作ろうと試みた。そして、ブラック・ショールズの公式に到達した。マートンは彼らの難解な議論を、確率解析を用いて書き直せばすっきりとし遙かに広い範囲の問題に適用できる理論に拡張できることを示した。数理ファイナンスの誕生である。以後、数理ファイナンスでは確率解析が基本言語となった。そして確率論の成果を次々に取り込み、主にアメリカで急速に発展していった。今日では、金融の現場で日常的に用いられている（これについては [1] に詳しく書かれている)。

今現在もっとも確率解析を用いている応用分野はファイナンスである。確率解析の創始者の一人であるバシュリエはデリバティブの価格決定という問題のためにブラウン運動の理論にたどり着いた。しかし、その後５０年以上の間、確率解析はファイナンスとは関係なく純粋数学として多くの人達により研究され発展していった。そしてそれが大きな理論に成長したとき、再びファイナンスに用いられるようになった。

数学は応用に大きな力を発揮する。しかし、必ずしも応用を睨みながら発展していくものではないし、応用を考慮せず研究されたとしても、応用に役立たないわけではない。その一方で、応用を考える人達がいなければ、その成果は応用されないままに終わってしまう。確率解析は主にヨーロッパと日本で発展していったが、その最大の応用である数理ファイナンスはアメリカで発見された。そしてそれが今、世界の金融を席巻している。皮肉な結果と感じるのだが、いかがであろうか。

参考文献

[1] 相田洋，茂田善郎，マネー革命 2 「金融工学の旗手たち」，ＮＨＫ出版，１９９９

[2] 江沢洋，だれが原子を見たか，岩波科学の本，岩波書店、１９７６

[3] バートン・マルキール，ウォール街のランダムウォーカー，（井手正介 訳），日本経済新聞社，１９９９